Ricardo Scucuglia R. da Silva (Org.)

Processos Formativos em Educação Matemática

Perspectivas filosóficas e pragmáticas

Uma coleção de livros? Uma coleção de livros relacionada a processos formativos? Um dos primeiros livros é voltado a formação do professor de matemática? Sim, há um pulsar na forma de livro digital, impresso, vindo do noroeste do estado de São Paulo! Um livro que tematiza questões de um recém-criado programa de pós-graduação em Ensino na nossa Unesp, também nesta região do estado de São Paulo. Como pode? De onde vem de tanto ânimo e energia em um momento em que o país vive uma avalanche de desmontes de políticas públicas? Em nível federal e estadual, tudo é feito para valorizar o privado, para escorraçar o que é público, seja ele o servidor, a faculdade ou o professor! Por que a audácia de um conjunto de professores - dos mais diferentes níveis de educação e em diferentes estágios de seu processo de formação de refletir sobre sua própria formação e sobre sua profissão de formador? A energia que emana deste livro é a esperança que desponta em um dos momentos mais difíceis da história deste país. Neste momento são implementadas políticas para aumentar a desigualdade social, para desvalorizar o professor, o piso salarial do professor não é anulado enquanto lei, mas simplesmente não é cumprido... e nenhum presidente ou governador é tirado do cargo, impedido de governar por não cumprir lei tão básica! Não há reflexões diretas sobre o quadro político do momento, mas sim reflexões que podem nos ajudar a pensar esse momento, e o próximo que está por vir. A incompletude do ser humano, como diria Paulo Freire, nos faz buscar a educação, a reflexão. É ela que talvez explique como em que um momento tão sem esperança, há um grupo de professores que ser tornam autores e publicam de forma coletiva.

Marcelo C. Borba

unesp

Educação Matemática

Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

9 788556 963109

editora fi
www.editorafi.org

Processos formativos em educação matemática

Série Processos Formativos

Processos formativos em educação matemática

Perspectivas filosóficas e pragmáticas

Organizador:
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

φ editora fi

Diagramação: Marcelo A. S. Alves
Capa: Lucas Fontella Margoni
Arte de capa: Andreas Wannerstedt

O padrão ortográfico e o sistema de citações e referências bibliográficas são prerrogativas de cada autor. Da mesma forma, o conteúdo de cada capítulo é de inteira e exclusiva responsabilidade de seu respectivo autor.

http://www.abecbrasil.org.br

Série Processos Formativos - 2

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; (Org.)

Processos formativos em educação matemática: perspectivas filosóficas e pragmáticas [recurso eletrônico] / Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva (Org.) -- Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2018.

217 p.

ISBN - 978-85-5696-310-9

Disponível em: http://www.editorafi.org

1. Educação, 2. Ensino, 3. Pedagogia 4. Filosofia I. Título. II. Série

CDD-371

Índices para catálogo sistemático:
1. Professores, métodos e disciplinas 371

A todos... professores (de matemática).

Os pontos fracos de um livro são com
frequência a contrapartida de intenções
vazias que não se soube realizar.
Gilles Deleuze

Sumário

Processos formativos em educação matemática: Perspectivas pragmáticas

Prefácio

Marcelo C. Borba

Uma coleção de livros? Uma coleção de livros relacionada a processos formativos? Um dos primeiros livros é voltado a formação do professor de matemática? Sim, há um pulsar na forma de livro digital, impresso, vindo do noroeste do estado de São Paulo! Um livro que tematiza questões de um recém-criado programa de pós-graduação em Ensino na nossa Unesp, também nesta região do estado de São Paulo.

Como pode? De onde vem de tanto ânimo e energia em um momento em que o país vive uma avalanche de desmontes de políticas públicas? Em nível federal e estadual, tudo é feito para valorizar o privado, para escorraçar o que é público, seja ele o servidor, a faculdade ou o professor! Por que a audácia de um conjunto de professores - dos mais diferentes níveis de educação e em diferentes estágios de seu processo de formação de refletir sobre sua própria formação e sobre sua profissão de formador?

A energia que emana deste livro é a esperança que desponta em um dos momentos mais difíceis da história deste país. Neste momento são implementadas políticas para aumentar a desigualdade social, para desvalorizar o professor, o piso salarial do professor não é anulado enquanto lei, mas simplesmente não é cumprido... e nenhum presidente ou governador é tirado do cargo, impedido de governar por não cumprir lei tão básica!

Não há reflexões diretas sobre o quadro político do momento, mas sim reflexões que podem nos ajudar a pensar esse momento, e o próximo que está por vir. A incompletude do ser humano, como diria Paulo Freire, nos faz buscar a educação, a reflexão. É ela que talvez explique como em que um momento tão sem esperança, há um grupo de professores que ser tornam autores e publicam de forma coletiva.

É esta a beleza deste livro, que agrupa ideias de diferentes matizes buscando compreender o que é ser professor de matemática. Ele é belo porque aborda tema subversivo neste momento: pensar e dar continuidade a formação do professor de uma matéria tão polêmica como a matemática.

Para muitos ela é motivo de humilhação cotidiana na sala de aula. Para outros motivos de prazer. Em sua dimensão pragmática, ela decide o futuro de muitos em diversos cursos, mesmo que dificilmente serão usadas no futuro. Mas o professor de matemática, certamente utilizará a matemática. Mas qual matemática? E esse é um tema que é abordado em alguns dos capítulos do livro, e certamente é abordado em diversas obras desse movimento denominado Educação Matemática, que lida com o drama da (não) aprendizagem matemática, assim como tenta compreender o papel da mesma dentro de diversos sistemas de atividade com diferentes normas e diferentes atores. Há o sistema da escola, há o sistema da sala de aula, há o sistema da família, há inúmeros sistemas virtuais! Todos têm normas, tecnologias e objetos que os distinguem e os entrelaçam.

Quando se olha para a família, as vezes se perde o cognitivo. Quando se olha para a estrutura mais geral da educação e da sociedade, pode se ver ofuscado o papel da emoção e do afeto na educação (matemática).

E esta uma das "belezuras", como diria Paulo Freire, de ser convidado para escrever um prefácio de um livro. Se lê o livro em primeira mão, e se vê as diversas possibilidades de entrelaçamento de capítulos. Há capítulos que tematizam sobre o que é formar? O que é educação? O que é matemática? O que é educação matemática? Há outros que recuperam o que Karl Marx escreveu sobre matemática! E aqui cabe um parêntesis, já que este capítulo me fez lembrar do grande educador matemático moçambicano

Paulus Gerdes que também estudou e resenhou a obra de Marx relativa à matemática. Como seria bom um debate entre os autores do capítulo e Paulus, se isso fosse possível!

Há também capítulos sobre o papel das tecnologias digitais não só na formação de professores como em uma parte das teorias que lidam com relação entre estas tecnologias e a cognição humana. Outros que tratam do trabalho de projetos nas séries iniciais da educação básica. No que chamamos de modelagem, em educação matemática, esses professores trabalham a matemática de forma interdisciplinar e exploratória, dando cores e vida a ideias trabalhadas em outros capítulos. De forma semelhante há capítulos sobre o uso de vídeos em educação matemática e o uso de diversas tecnologias para a inclusão de alunos com deficiências visuais.

Nem de longe, me propus a fazer nos dois parágrafos acima, um resumo do livro. Muito menos esbocei aqui todas as reflexões que me ocorreram. Prefaciar uma obra como essa é uma honra e um ato de entrega. Se passeia pelas ideias de vários autores, muitos deles conhecidos de bancas, de comitês, de instâncias cheias de vida da academia. Prefaciar o livro organizado por um amigo e colaborador é um ato de carinho mútuo.

O reconhecimento, o carinho sentido pelo convite, não me dá o direito de impingir o leitor a breve articulação que fiz entre os capítulos livro, que também pode ser visto como um sistema de atividade em constante mudança, e o cenário político nacional, também um sistema em constante mutação. Convido o leitor a fazer suas articulações, mostrando que um sistema além dos artefatos, normas, objetivos, comunidade há também sujeitos, que na complexidade do cotidiano se transformam também em agentes transformadores com a leitura.

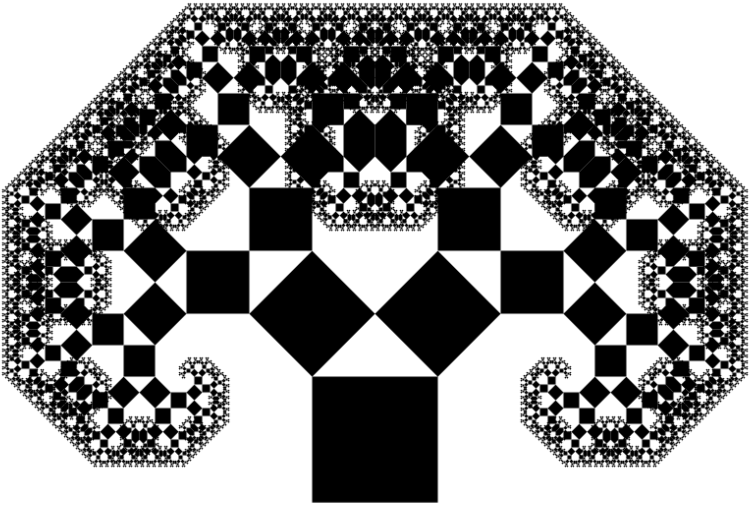
Unesp/Rio Claro, SP, novembro de 2017

Apresentação

Processos formativos: experiências estéticas

Ricardo Scucuglia R. da Silva

Ao buscarmos os verbetes *processo* e *formação* em Abbagnano (2007), podemos construir o seguinte entendimento: *Processo Formativo* (PF) é o procedimento/devir educativo ou maneira de agir civilizatória, "que se expressa nas duas significações de cultura, entendida como educação e como sistema de valores simbólicos" (ABBAGNANO, 2007, p. 470). Embora a literatura em nossa área convencionalmente relacione PFs à formação de professores, apreciamos e consideramos pertinente a atribuição de complexidade semântica acerca dos conceitos. Este livro explicita alguns dos platôs acerca de PFs em Educação Matemática. Celebremos a fractalidade!



Fonte:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/PythagorasTree.png

A *belezura* mencionada no prefácio deste livro fomenta um pulsar estético. Na abordagem hermenêutica proposta por Pinnar et. al. (2008), o Currículo pode ser entendido como um *texto estético*. Trata-se de um posicionamento questionador acerca de aspectos cotidianos e convencionais, no qual conhecimento, ensino e aprendizagem são vistos de múltiplas perspectivas; um escalar de percepções submersas. A condição pós-moderna diz respeito à incredulidade acerca de metanarrativas (LYOTARD, 1986). Nesse sentido, questiona-se: seria possível conceber PFs como *experiências estéticas*?

De acordo com John Dewey,

> Uma experiência estética só pode compactar-se em um momento no sentido de um clímax de processos anteriores de longa duração se chegar em um movimento excepcional que abarque em si todas as outras coisas e o faça a ponto de todo resto ser esquecido. O que distingue uma experiência como estética é a conversão da resistência e das tensões, de explicitações que em si são tentações para digressão, em um movimento em direção a um desfecho inclusivo e gratificante. (DEWEY, 2010, p. 139).

O princípio da multiplicidade é um aspecto fulcral em um currículo contemporâneo, pós-moderno. Doll (1993) explora concepções sobre *processos* (de pensamento) em Dewey e Whitehead, destacando perspectivas sobre experiência, resolução de problemas e aprendizagem. No entanto, para transcender uma compreensão do agente educativo como um indivíduo ("apenas") psicogenético, concebido de maneira reducionista como Piagetiano, Doll (1993) destaca o conceito de *ser* em Heidegger: *being-in-the-world*. O sujeito em formação, histórico-cultural em essência, *é* e *está* no mundo com os outros e com as coisas (artefatos, instituições, etc.). Sobre o processo formativo (pedagógico), o qual perpassam aspectos epistemológicos, metodológicos e ontológicos da Educação, Paulo Freire enuncia: "o mundo não é; o mundo está sendo". Portanto, a ação formativa discutida no primeiro capítulo deste livro fomenta uma dimensão estética da fenomenologia no contexto da formação de professores.

A teoria da ação comunicativa, discutida no segundo capítulo, é uma perspectiva extraordinária acerca da compreensão de PFs em Educação Matemática de um ponto de vista político. A identidade democrática (des)construída em PFs envolvendo ensino aprendizagem de matemática tende a sublimação em cenários da Teoria Crítica. A dialética ação-reflexão atribui à *curiosidade epistemológica* uma natureza peculiar em cenários da Educação Matemática Crítica. Coerentemente, no terceiro capítulo, são exploradas inquietações como: qual a natureza do pensamento diferencial em Marx? Em tempo, em época de retrocesso político-social no Brasil, qualquer reflexão de caráter marxista torna-se um ato subversivo. Reconhecemos a estética do oprimido em PFs.

> A castração estética vulnerabiliza a cidadania obrigando-a a obedecer mensagens imperativas da mídia, da cátedra e do palanque, do púlpito e de todos os sargentos, sem pensá-las, refutá-las, sequer entende-las! O analfabetismo estético, que assola até alfabetizados em leitura e escrita, é perigoso instrumento de

> dominação que permite aos opressores a subliminal Invasão dos Cérebros! (BOAL, 2009, p. 15).

> O pensamento sensível, que produz arte e cultura, é essencial para a libertação dos oprimidos, amplia e aprofunda sua capacidade de conhecer. Só com cidadãos que, por todos os meios simbólicos (palavras) e sensíveis (som e imagem), se tornam conscientes da realidade em que vivem e das formas possíveis de transformá-la, só assim surgirá, um dia, uma real democracia (BOAL, 2009, p. 16).

No quarto capítulo, o conceito denominado *didática da invenção* é explicitado pelos autores como temática fundamental. O texto, na realidade, propõe uma abordagem reflexiva sobre formação de professores de um ponto de vista da *filosofia da diferença*. Alguns autores do século XX como de Gilles Deleuze, Jacques Derrida e Walter Benjamin, em minha opinião, são comumente evocados ao se pensar sobre a diferença em filosofia. Tomaz Tadeu da Silva apresenta pontos importantes sobre *diferença*, as vezes concebida equivocadamente como *identidade* em atuais debates em Educação:

> 1. A diferença não tem nada a ver com o diferente. A redução da diferença ao diferente equivale a uma redução da diferença à identidade. 2. A multiplicidade não tem nada a ver com a variedade ou a diversidade. A multiplicidade é a capacidade que a diferença tem de (se) multiplicar. 3. Não é verdade que só pode diferir aquilo que é semelhante. É justamente o contrário: só é semelhante aquilo que difere. 4. A identidade é predicativa, propositiva: x é isso. A diferença é experimental: o que fazer com x. 5. A identidade é da ordem da representação e da recognição: x representa y, x é y. A diferença é da ordem da proliferação; ela repete, ela replica: x e y e z... 6. A diferença não é uma relação entre o um e o outro. Ela é simplesmente um devir-outro. 7. A questão não consiste em reconhecer a multiplicidade, mas em ligar-se com ela, em fazer conexões, composições com ela. 8. A diferença é mais da ordem da anomalia que da anormalidade: mais do que um desvio da norma, a diferença é um movimento sem lei. 9. Quando falamos de

> diferença, não estamos perguntando sobre uma relação entre x e y, mas, antes, sobre como x devém outra coisa. 10. A diferença não pede tolerância, respeito ou boa-vontade. A diferença, desrespeitosamente, simplesmente difere. 11. A identidade tem negócios com o artigo definido: o, a. A diferença, em troca, está amasiada com o artigo indefinido: um, uma. 12. A diferença não tem a ver com a diferença entre x e y, mas com o que se passa entre x e y. 13. A identidade joga pelas pontas; a diferença, pelo meio. 14. A identidade é. A diferença devém (SILVA, 2002, p 66).

A opção em estruturar este livro em duas partes – perspectivas filosóficas e perspectivas pragmáticas – também pode ser justificada de um ponto de vista estético. Em um cenário pós-moderno (LYOTARD, 1986), usufruímos de dualidades e, concomitantemente, transcendemos subversivamente dicotomias. Nem a solidão do ensino, nem o confinamento da aprendizagem; PFs são da ordem da *ensinagem*, no sentido proposto Emerique (1999). Portanto, embora os quatro primeiros capítulos deste livro tenham sido tematizados como filosófico-teóricos, o caráter prático/empírico/pragmático desses textos é latente e atual. Analogamente, as questões teóricas apresentadas nos quatro capítulos alocados na seção sobre perspectivas pragmáticas extrapolam práxis educativas viscerais. Na dualidade empirismo/subjetividade (DELEUZE, 2012), a hermenêutica fomenta sentimentos de sublimação. Viva a intersubjetividade!

> É este o segredo do empirismo. De modo algum é o empirismo uma reação contra os conceitos, nem um simples apelo à experiência vivida. Ao contrário, ele empreende a mais louca criação de conceitos, uma criação jamais vista e maior que todas aquelas de que se ouviu falar. O empirismo é o misticismo do conceito e seu matematismo (DELEUZE, 1994, p. ix).

Nesse sentido, no quinto capítulo se discute uma possibilidade do uso de tecnologias digitais em Educação Matemática enfatizando a utilização do software GeoGebra na formação de professores.

Destacam-se: (1) especificidades acerca de conhecimentos docentes com base em Shulman: TPACK (conhecimento tecnológico pedagógico de conteúdo); (2) o GeoGebra: provavelmente, o maior sucesso tecnológico da Educação Matemática; e (3) o *construcionismo*: uma perspectiva sobre aprendizagem com tecnologias proposta por Seymour Papert nos anos 1980's, a qual está originalmente associada a linguagem de programação para crianças, mas que pode ser pensada com relação ao uso de tecnologias em processos de ensino e aprendizagem de maneira geral. Esse capítulo explicita um cenário possível acerca da atual fase do uso de tecnologias digitais em Educação Matemática. Nesse cenário, *construcionismo* e GeoGebra se encontram e reinventam proporcionando aspectos relevantes do ponto de vista da visualização e experimentação com tecnologias na formação de professores e futuros professores de matemática. Trata-se um processo formativo envolvendo um *pensar-com-tecnologias*: formação de coletivos pensantes de *seres-humanos-com-mídias*.

A pedagogia de projetos nos anos iniciais do Ensino Fundamental é discutida no sexto capítulo. Trata-se da descrição de um cenário formativo para educação matemática fomentado na Escola Maria Peregrina. A proposta pedagógica nesse contexto amalgama de maneira consistente aspectos da educação progressista de John Dewey e as inteligências múltiplas de Howard Gardner. Sendo esta uma discussão pertinente ao Ensino Fundamental, tanto do ponto de vista curricular como avaliativo, nota-se a relevância da experiência na aprendizagem matemática e a constituição de uma genuína comunidade escolar colaborativa. É justo a Escola Maria Peregrina ser considerada pelo Ministério da Educação uma das escolas mais inovadoras do Brasil.

A *educação inclusiva*, a qual diz respeito a especificidades e singularidades de crianças com deficiências, transtornos globais de desenvolvimento e altas habilidades/superdotação, tem sido temática relevante de discussão em documentos curriculares, ações educacionais e pesquisas no âmbito nacional e internacional. Uma possibilidade de educação inclusiva, em especial a aprendizagem matemática de alunos cegos, é discutida no sétimo capítulo. Destacando os conceitos denominados *desenho universal* e *tecnologia assistiva*, estudantes cegos puderam explorar conteúdos referentes a números inteiros, geometria e trigonometria com a utilização de materiais manipuláveis. A estética da inclusão é da ordem do sentir-se seguro: aprimoramento do sentimento de pertencimento, diriam os educadores que trabalhamna área de Currículo. Esse capítulo fomenta algumas das seguintes perspectivas, as quais aprecio significativamente:

> O diretor precisa apoiar os professores em seus esforços para desenvolver e oferecer práticas de aula inclusivas e eficazes. Uma das melhores maneiras de demonstrar esse apoio é garantir que a escola seja segura, tanto psicológica quanto fisicamente. [Mas como os diretores podem usar abordagens para ajudar os professores a gerenciar suas salas de aula como um suporte instrutivo para inclusão?]. Existem dois temas subjacentes. Primeiro, é persistente/consistente que o comportamento disruptivo de alunos prejudica significativamente a aprendizagem de todos os alunos, mas particularmente dos alunos com excepcionalidades. Em segundo lugar, é que todos os alunos, e especialmente alunos com excepcionalidades, aprendem e prosperaram dentro de ambientes de aprendizagem psicologicamente seguros (MACMILLAN; EDMUNDS, 2010, p. 5)[1].

O oitavo capítulo do livro encerra a obra discutindo relevantes questões acerca de processos formativos envolvendo o ensino de

---

[1] The principal needs to support teachers in their efforts to develop and deliver effective inclusive classroom practices. One of the best ways to demonstrate this support is to ensure that the school is safe, both psychologically and physically. Edmunds's chapter on managing student behavior provides insights into the underpinnings of behavior and suggests how principals can use school-wide approaches to help teachers to manage their classrooms as an instructional support for inclusion. There are two underlying themes. First, is that persistent/consistent disruptive student behavior significantly undermines the learning of all students, but particularly for students with exceptionalities. Second, is that all students, and especially students with exceptionalities, learn, thrive, and prosper within psychologically secure learning environments (MACMILLAN; EDMUNDS, 2010, p. 5).

álgebra. São também explorados alguns aspectos sobre o uso de tecnologias digitais, visto que a utilização de vídeos é parte significativa da pesquisa desenvolvida. Nota-se nesse cenário uma relevante articulação entre ensino, pesquisa e extensão universitária em termos de formação de professores de matemática. Particularmente, por uma opção pessoal, foi uma experiência prazerosa, essencialmente estética, ler esse capítulo com base na brilhante perspectiva sobre álgebra proposta por Romulo Campos Lins em sua tese de doutorado. Lins (1992) propôs que *pensar algebricamente* envolve três maneiras articuladas de pensar: (1) aritmeticamente; (2) internamente; e (3) analiticamente. Percebemos a pertinência de tal perspectiva sobre o pensamento algébrico em contextos diversos. Com saudades, paro por aqui...

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BOAL, A. A *Estética do oprimido.* Rio de Janeiro: Garamond, 2009.

DELEUZE, G. *Difference & repetition.* New York: Columbia University Press, 1994.

DELEUZE, G. *Empirismo e subjetividade***.** Tradução de Luiz B. Orlandi. São Paulo, SP: Ed. 34, 2012.

DEWEY, J. *Arte como experiência.* São Paulo: Martins, 2010, 646 p.

DOLL, W. *A post-modern paradigm on curriculum.* New York: Teachers College Press, 1993.

EMERIQUE, P. S. Isto e aquilo: jogo e “ensinagem” matemática. In: BICUDO, M. A. V. *Pesquisa em educação matemática:* concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP. p.185- 198, 1999.

LINS, R. C. *A framework for understanding what algebraic thinking is.* Tese (Doctor of Philosophy). UK: University of Nottingham, 1992, 372p.

LYOTARD, J. F. *A condição pós-moderna*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1986.

MACMILLAN, R. B,; EDMUNDS, A. L. Leadership for inclusion: questions and dilemmas. In: EDMUNDS, A. L.; MACMILLAN, R. B. *Leadership for inclusion:* a practical guide. The Netherlands: Sense Publishers, 2010.

PINNAR, W. F.; REYNOLDS, W. M.; SLATTERY, P.; TAUBMAN, P. M. *Understanding curriculum:* an introduction to the study of historical and contemporary curriculum discourses. New York: Peter Lang, 2008.

SILVA, T. T. *Identidade e diferença:* impertinências. *Educação & Sociedade,* v. 23, n. 79, 2002.

WIKIMEDIA. *Pythagoras Tree.* Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/PythagorasTree.png>. Acessado em 4 de dezembro de 2017.

Processos formativos em educação matemática:

perspectivas filosóficas

Capítulo um

Filosofia da educação matemática: sua importância na formação de professores de matemática

Maria Aparecida Viggiani Bicudo[1]

Ao abordar este tema, destacam-se filosofia da educação matemática e formação de professores de matemática. Neste artigo, tarei ambas as questões que se levantam. Exporei a respeito da Filosofia da Educação Matemática, evidenciado o núcleo de sua preocupação: o dar-se conta da própria ação, a análise dessa ação em termos de intencionalidades de quem as atualiza, os modos de ser realizada, os desdobramentos e as reflexões. Destacarei modos de proceder ao se tematizar isso que se evidencia nesse núcleo, mediante uma linguagem filosófica, bem como os modos pelos quais a filosofia trabalha. Focarei o núcleo apontado e exporei a urgência de tomá-lo *também* como pertencente ao núcleo de preocupações com a formação de professores de matemática.

---

[1] Professora Titular de Filosofia da Educação (aposentada) da Universidade Estadual Paulista – UNESP, IGCE, Campus de Rio Claro e Professora do Programa de Pós-Graduação em educação Matemática desse mesmo Campus. Pesquisadora 1-A do CNPq. Presidente da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos www.sepq.org.br

Introduzindo o tema

Comecei a lecionar no Ensino Superior em 1966 e sempre trabalhei com Educação, mais especificamente com Filosofia da Educação. Chamava-me a atenção a ausência dessa disciplina dentre aquelas obrigatórias, as denominadas "pedagógicas", no currículo de cursos de Licenciatura. Nos anos de 1970, por exemplo, essas disciplinas eram: Didática, Prática de Ensino, Psicologia da Aprendizagem, Psicologia do Desenvolvimento e Estrutura e Funcionamento do Ensino do Primeiro e do Segundo Graus.

Em 1982 comecei a trabalhar no curso de Licenciatura e de Bacharelado de Matemática, na UNESP, campus de Rio Claro. Trabalhava com Tópicos Específicos: Filosofia da Educação, lecionada como optativa e com Teoria do Conhecimento, também optativa. Foi nesse momento que me aproximei da formação do educador matemático, já participando de reuniões com professores sobre possível curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Isso ocorreu em 1983, sendo que esse curso se iniciou em 1984, tendo sido posteriormente, denominado Educação Matemática.

Em 1985 e em 1986 o movimento em prol da criação da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática – se fortaleceu e nós, de Rio Claro, participamos ativamente dele. Nos encontros havidos, dava-me conta de que na comunidade de professores de Matemática, dentre os que estavam envolvidos com esse movimento, não havia quem trabalhasse com Filosofia. Os trabalhos giravam em torno do ensino da Matemática, da Didática e, de modo muito intenso, da Psicologia da Educação Matemática. Tanto a Etnomatemática, como a História da Educação Matemática, estavam começando a desabrochar. Ao conversar sobre a questão da Filosofia na Educação Matemática com alguns colegas, era comum afirmarem não haver espaço para esse modo de pensar nessa área, pois os professores, principalmente os das escolas do Ensino Fundamental estavam interessados em como melhor trabalhar com Matemática em suas atividades de ensino.

Esse, entretanto, não era o meu entendimento. Por longa data, eu já criticava o fato de, nas disciplinas obrigatórias para as Licenciaturas, não haver espaço para um pensar reflexivo sobre educação, ensino, avaliação e outros temas que, do meu ponto de vista, eram significativos para a formação do professor.

Notem que a formação do profissional *professor de matemática* está ao encargo dos cursos de Licenciatura de Matemática, e, considerando professores da Educação Infantil e das primeiras séries do Ensino Fundamental, do curso de Pedagogia, ainda que profissionais formados em outros cursos como Física, possam lecionar essa disciplina, em casos específicos. Desde 1996, quando foi aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, tem havido um movimento que revela a preocupação com o professor, e no caso da região de inquérito, com a qual trabalhamos, o de Matemática. Houve esforço para mudar o currículo desses cursos e estabelecer o que se entendia a respeito do que o professor de Matemática deveria compreender e que ferramental técnico-científico e histórico-cultural esse professor deveria dominar. As discussões havidas abriram caminhos para debates sobre as questões sócio-culturais, sobre a importância da prática em cursos de formação de professores e, conforme entendo, os educadores matemáticos não adentraram as questões concernentes ao entendimento da própria matemática e os modos de com ela trabalhar.

Esse entendimento é também enfatizado por Baldino, em seu depoimento a Venturin (2015) (BICUDO; VENTURIN, 2016) que apresenta argumentos sobre a dificuldade enfrentada por alunos de Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática em desenvolver pesquisas que abranjam a própria Matemática. Esse autor, em entrevista realizada com Venturin (2015) argumenta que, em sua experiência vivenciada como professor e como orientador de alunos em Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, constata que os alunos, em sua grande parte, apresentam um histórico de autoproteção para serem aprovados nas disciplinas da

Matemática, sem que tenham compreendido a própria Matemática, no período da graduação.

Na medida em que os educadores matemáticos enfatizam a importância da compreensão do humano e dos seus modos histórico-sócio-culturais de viver para realizar seu trabalho, tendo como foco o aluno e sua formação de cidadania e se afastam da ciência Matemática e seus modos de constituir conhecimento e de aplicá-los, enfraquecem seu posicionamento no campo da Educação Matemática. Isso porque o próprio objeto de trabalho da Educação Matemática é interdisciplinar e, novamente trago Baldino, por com ele concordar. Ele afirma que o objeto Educação Matemática é interdisciplinar. Ou seja, a própria raiz da ideia de Educação Matemática traz em sua constituição a interdisciplinaridade, pois, nas palavras desse autor, Matemática e Pedagogia se fundem para que ela (Educação Matemática) possa ser (BICUDO, VENTURIN, 2016). Isso dificulta o embate entre educadores matemáticos e matemáticos, criando uma cisão, presente na dificuldade de trabalhar o objeto da própria educação matemática: os educadores matemáticos impõem-se com o discurso, amplamente justificável, de que não basta saber matemática para ensiná-la. Mas não avançam com as exposições sobre a articulação entre a compreensão do modo de ser da pessoa histórico-social e culturalmente situada e as ideias e ferramental matemáticos.

Entendo que na forma/ação do professor de Matemática, o foco deveria incidir no próprio objeto *Educação Matemática*. Isso demanda trabalho articulador entre as Ciências Humanas e da Educação e com a Matemática e tecnologias. As atividades desenvolvidas que visam essa *form/ação* precisam abranger, então, tanto o *como fazer* e *por que fazer assim*, nessas áreas de investigação, como um pensar crítico e reflexivo sobre esse fazer e por que fazer.

Dada a proposta desse artigo, vou destacar, desse todo, o pensar crítico e reflexivo, trazendo o meu pensar sobre a importância da Filosofia *da* e *na* Educação Matemática no movimento de *form/ação* do professor de Matemática.

Nessa *introdução* comparecem dois temas: o considerado significativo ser trabalhado em cursos de Licenciatura de Matemática e *form/ação* de professores. Exporei, inicialmente, minha concepção de forma/ação e de *form/ação* de professor (de Matemática), para então explicitar meu entendimento sobre a importância da Filosofia da Educação Matemática nessa *form/ação*.

Sobre forma/ação do professor

Eu considero a *form/ação* do professor de Matemática como um movimento para o qual não é possível imputar-se uma data de início e de término. Esse movimento vem se dando ao longo da vida desse profissional, na medida em que ele começa a se familiarizar com a própria palavra *matemática*, com as atividades matemáticas realizadas ainda em situações de jogos e de brincadeiras e, certamente, de modo mais focado, durante o processo de sua escolarização, qualquer que seja o nível considerado. De modo tematizado, a formação desse professor é objetivo de cursos específicos que auferem o título de *licenciado em Matemática e em Pedagogia* ao profissional que poderá ensinar Matemática em escolas. Entretanto, ao trabalhar como professor, sua formação continua, pois aprende com seus alunos, com seus colegas, com suas dúvidas, com seus acertos e com seus erros, com a organização do mundo do trabalho na instituição *escola*, com os estudos que realiza e com sua disponibilidade de preparar as atividades destinadas ao ensino, respondendo à sua preocupação para com a aprendizagem do seu aluno e para com a própria Matemática. Matemática aqui, considerada como ciência da civilização ocidental e, igualmente, abrangendo as ações que se encontram no âmago da constituição dessa ciência e que estão presentes em diferentes culturas, em diferentes épocas e explicitadas por diferentes linguagens, como:

contar, posicionar-se no espaço-temporalmente, mensurar, acrescentar, diminuir, por exemplo.

Pondo-me atenta a esse movimento, entendo que seu cerne é constituído por *forma* e *ação*, que tenho denominado de *form/ação,* desde 2003 (Bicudo, 2003).

Forma/ação é um movimento contínuo, *porque histórico*, que se realiza sendo-se professor de Matemática. Portanto, como afirmado acima, não inicia com a Licenciatura, nem se termina com ela. Não tem como condição necessária e suficiente cursos de especialização e de pós-graduação, embora eles, se realizados, fortaleçam e ampliem o que já vinha sendo construído na Licenciatura. A forma/ação enlaça o efetuado nesses cursos, mas não o repete. A ***ação,*** realizada no processo de ensino e aprendizagem que se dá em cursos dessa natureza, incide sobre a ***forma.*** Esta, porém já estava presente na força posta no movimento de tornar-se pessoa, bem como naquele de realizar cursos de formação do professor de matemática.

Todavia, não é uma ***forma*** sem matéria, como se isso fosse possível, ou seja, como se fosse uma ideia ou um projeto que pairasse de modo genérico acima do mundo humanamente vivenciado. A ***forma,*** para se realizar, precisa da matéria e esta imprime modos de ser da forma. Entretanto, para que se atualize, isto é, para que venha a ser, precisa da ***ação***. Esta é realizada pelo sujeito, entendido como corpo vivente, ou seja, corpo encarnado que se movimenta intencionalmente. Assim, forma, matéria e ação estão constitutivamente unidas para a realização de qualquer projeto, e, neste caso, para a realização da professoralidade do professor de matemática.

Vejamos, em nosso cotidiano, possíveis significados de *forma/ação*.

A ***forma,*** de que falamos, é a ideia que construímos na história da nossa cultura a respeito do modo de ser professor e, em específico, de professor de Matemática. Ela traz consigo concepções de professor e concepções de Matemática, de maneira que essas concepções pairam como um fundo ou como um solo em que, ao estarmos situados em uma sociedade, vão adquirindo nuanças em modalidades antevistas de acontecerem. Já está sendo nutrida, em todo esse percurso, da matéria constituída por valores e concepções que se amalgamam em ideias que apontam direções. Apontam metas, no sentido de indicarem o que está além desta situação específica. Entretanto, essas ideias são abrangentes e solicitam especificar o que ocorre com o jogo estabelecido com o material disponível. Que material é esse? É o das relações sociais estabelecidas no espaço/tempo em que estão as ideias, a se especificar. É o das pessoas dispostas a realizar o apontado, imprimindo, porém, suas expectativas e respectivos modos de ser e de compreendê-las. É o dos artefatos à disposição no mundo naquele momento. É o da rede de conhecimento produzido, mantido e comunicado pela linguagem *na* e *pela* materialidade das tecnologias disponíveis.

A materialidade, assim entendida, se entrelaça à forma, imprimindo-lhe configurações. Entretanto, a matéria sem a forma, não tem forma. E isso não é trocadilho. É constitutivo. Para a realização dessa forma é preciso que o ato seja efetivado, ou seja, é preciso ***ação***. Quem age? O sujeito. É sim a ação de cada um, todavia, nunca isolado, mas sempre junto aos outros e em situação.

O que isso tem a ver com a forma/ação do professor de Matemática? E, mais do que isso, com o afirmado ser ela um movimento contínuo entrelaçado ao do tornar-se pessoa e do tornar-se professor de matemática, no próprio movimento do sendo pessoa e professor?

A materialidade da forma que impulsiona o projeto de cursos como os de Licenciatura, de extensão, especialização, pós-graduação é dada no interior das instituições em que eles são ofertados. Nessas instituições estão profissionais que se propõem a efetuar um projeto de curso específico, no caso aqui focado, desses cursos mencionados e cujas ações são orientadas por modos de ver e de conceber prévios[2], abrangendo concepções de pessoa, de professor, de Matemática. Além disso, a própria instituição dispõe de uma estrutura e permite um funcionamento, conduzidos por muito do que lhe é próprio, mas também por determinações legais que estão acima dela mesma e que indicam um projeto maior da sociedade para esses cursos. A forma, por sua vez, carrega consigo ideais e respectivos valores da história da civilização. Entra em jogo uma complexidade de aspectos que, entrelaçadamente, constituem a forma/matéria da forma mencionada na expressão forma/ação. As ações efetuadas por pessoas trazem à realidade a forma/ação do professor.

Esse processo se expande para as realidades em que cada pessoa se põe a exercer sua profissão. Tomemos como exemplo, escolas em que se faz a educação dos anos iniciais. O professor de Matemática traz consigo modos de fazer, compreensões, procedimentos e encontra à sua disposição equipamentos, estrutura e funcionamento daquela escola (ou qualquer que seja o ambiente de educação) e crianças que também se encontram em seu movimento de ser, sendo. Alunos de últimos semestres de um curso de Licenciatura em Matemática, assim se referem sobre um possível trabalho com a Educação dessa fase da educação escolar:

> [...] lidar com o simples, com o elementar acaba sendo uma forte barreira [...] Para os alunos o trabalho com a primeira fase é mais complexo para eles e indicam que teriam muito mais dificuldades do que com as demais fases do ensino, pois acreditam que a didática utilizada no trabalho com crianças é mais complexa e o curso além de ter pouca didática enquanto disciplina e conteúdo, não oferece as ferramentas que percebem como necessárias para o desenvolvimento desse trabalho. (BAUMANN, 2013, p. 179).

---

[2] Conforme Heidegger (1988) em *Ser e Tempo*, o ver e o conceber prévios dizem de modos de entender-se do fenômeno focado por existencialmente ser-se no-mundo-com-os-outros. São concepções com as quais estamos familiarizados e que nos passam despercebidas. Apenas quando as estranhamos por alguma ocorrência, passamos a tratá-las de modo tematizado, buscando compreender o que falam.

Eu não considero que um curso de graduação possa dar conta de todas as possibilidades de trabalho que se abram aos seus egressos, embora pense que deva abordar temas que perpassem possibilidades visualizadas. Considero que a forma/ação da professoralidade também se dá no próprio trabalho efetuado em uma realidade determinada, considerada aqui inclusive como aquela do curso realizado e, certamente, a do campo de trabalho.

Apontei uma realidade: a educação dos anos iniciais. Como se daria sua forma/ação nessa realidade? De imediato dizemos: no estar junto às crianças e à matemática no ambiente em que a educação se efetua. Estar junto quer dizer: ouvir o dito pela criança individualmente e por todas em conjunto, buscar compreender o sentido que o expresso pode fazer para si, para além da própria expressão. E, com sua ação, mostrar possibilidades, oferecer recursos para que o expresso pela criança seja levado avante em novas ações. Procedendo assim, o professor já enfrenta desafios que balançam suas concepções prévias, tanto sobre Educação, como sobre Matemática e seu ensino para essas crianças.

Quais as possibilidades que se abrem ao tornar-se professor de Matemática? Frente aos desafios, ele pode se abrir e buscar modos de ser e de fazer que correspondam às solicitações postas pelos desafios, sendo nesse movimento de forma/ação. Pode, também, desistir, dada a dificuldade que percebe ter que enfrentar, solicitando dispensa médica ou não, afastamento temporário ou definitivo. Pode, ainda, fechar-se em suas concepções e modo de ser e não ouvir o dito pelas crianças e pela própria contextualidade de sua prática. Nessas duas últimas situações apontadas, o movimento de forma/ação encontra barreiras.

Consideremos o enfrentamento e a abertura. Apenas ouvir e atender às solicitações, ainda que nutra e mantenha o movimento da forma/ação do professor, não o conduz por si à compreensão de si, do seu trabalho e do respectivo contexto em que atua.

É preciso que esteja atento, *dando-se conta do* que faz e de como percebe isso que faz, que proceda a um relato do efetuado e reflita sobre o ocorrido, compreendendo aspectos que se mostram fáticos, ou seja, que dizem respeito a um evento individual e outros que concernem a um modo de fazer que se repete e que se mostra bem sucedido, dada a materialidade em que a forma se realiza mediante sua ação. Esse é um trabalho de análise, de crítica e de reflexão. Conforme eu entendo, trata-se de investigação sobre a forma/ação do professor e que pode se constituir em *produção de conhecimento* sobre esse assunto.

Esse *estar atento* ou *dar-se conta de* refletem ações reflexivas. Refletir é próprio da constituição da pessoa. Toda pessoa tem possibilidade de refletir, do mesmo modo, por exemplo, que toda pessoa tem possibilidade de realizar ações de somar, de calcular distâncias, de posicionar-se espaço-temporalmente em termos de mais próximo, de mais distante, antes, depois.

A tematização do pensar abrangente, crítico e reflexivo é trabalhada pela Filosofia. A seguir trago algumas ideias presentes em seu núcleo.

A Filosofia

É importante que seja destacado que a Filosofia apresenta características específicas que podem ser postas como interrogações formuladas desde seu nascimento, na Grécia Antiga e que persistem até nossos dias, dada a sua importância e a sua abrangência, bem como o seu modo de proceder. São três as que sempre têm sido retomadas na historicidade da civilização ocidental, em seus diferentes períodos e por diferentes autores e modos de encaminhar discussões sobre elas: o que é o real? O que é o conhecimento? O que é o valor? São, portanto, perguntas sobre ontologia, epistemologia e axiologia. O modo de procedimento de suas investigações se destaca como sendo analítico, reflexivo e universal. Analítico, pois procede a análises exaustivas sobre o tema investigado, buscando compreendê-lo à luz da literatura existente, tomada sempre como ponto de diálogo crítico entre o autor do texto e o investigador. Reflexivo, pois sempre se volta sobre o dito, para se indagar pelo seu sentido e significado histórico-cultural. Universal, uma vez que nunca toma como estudo um tema pontual, mas sempre como abrangente e que busque uma compreensão ampla sobre o indagado.

O pensar filosófico nasce sempre de uma dúvida que quebra o pensar ingênuo, ou seja, aquele em que permanecemos acreditando e agindo conforme o que está posto no contexto em que vivemos. A dúvida traz consigo inquietação, um desconforto e um movimento que nos faz aceitar e não aceitar ao mesmo tempo o que nos é dito, fazendo-nos assumir uma atitude cética. O tempo em que permanecemos vivenciando a dúvida pode nos levar a aquietar-nos, persistindo no ceticismo ou avançar, expressando uma interrogação e procedendo de modo sistemático para compreender o indagado.

Como exemplo, cito as três perguntas colocadas por Kant e analisadas com propriedade por Buber (1967), que acrescenta uma quarta, para evidenciar a universalidade da interrogação:

1. O que posso saber?
2. O que devo fazer?
3. O que me cabe esperar?
4. O que é o homem?

A Filosofia oferece possibilidade de se entrar em contato com sistemas filosóficos e obras de filósofos, cujos estudos abrem espaços para uma sistemática do pensar de modo abrangente, crítico e reflexivo. Sua característica é pensar sobre ações e produtos realizados ou a serem realizados. Estes são entendidos como projeto, por exemplo. Desse modo, pode haver um pensar sistemático, abrangente, crítico e reflexivo sobre História, Matemática, Física, Arte, sobre si mesmo, etc. Isso significa que se toma, por exemplo, a Matemática e se analisam suas teorias, seus modos de produção, suas concepções de verdade, de certo, de errado, do que considera prova, dentre outros aspectos nucleares a essa ciência, para expor as concepções subjacentes ao seu modo de proceder, ou seja, as visões de mundo (realidade) e epistemológicas (de conhecimento) com as quais trabalha ou com as quais diferentes teorias e concepções de matemática trabalham, bem como de valor, no sentido de analisar o que vale para essa ciência, quais as crenças que subjazem seus discursos. No caso de pensar sobre projetos, trata-se de analisar as propostas que abrange e ponderar sobre os aspectos éticos, sociais, culturais, econômicos, administrativos e outros possíveis, visualizados nas respectivas atualizações.

Apresentadas essas ideias, no tópico seguinte focarei Filosofia da/na Educação Matemática e destacarei como entendo sua importância na *form/ação* de professores de Matemática

Filosofia da(na) Educação Matemática na forma/ação do professor: por quê?

Sobre Filosofia da Educação Matemática

A Filosofia da Educação Matemática tem como foco a própria Educação Matemática. Isso quer dizer que sua investigação sempre é conduzida de modo a analisar criticamente o exposto sobre o tema focado para estudo e, então, realiza uma reflexão sobre isso que foi analisado, em termos da pergunta levantada e o tratado pela área de inquérito, pois diz de um estudo filosófico. Suas questões são abrangentes. Podem, por exemplo, mencionar-se: Educação Matemática, qual o seu significado? Como compreender a realidade dos objetos matemáticos e, consonante com essa compreensão, de que modo trabalhá-los em Educação Matemática, colocando-se em destaque as atividades de ensino e de aprendizagem? A Matemática deve ser ensinada a todos, desde a educação infantil? Por quê? De que modo? Quais as características do pensar: algébrico, geométrico, do cálculo e da análise, da estatística, das tecnologias e o que deveria, à luz dessa análise, ser apontado como importante a ser ensinado nos diferentes níveis de ensino?

Essas perguntas apontam para os *FINS* da Educação Matemática, uma vez que estão destacando: por que ensinar Matemática? Deve-se ensinar Matemática a todos desde a educação infantil? Qual a realidade dos objetos matemáticos e quais as características de sua produção e da constituição do conhecimento dessa produção?

Trabalhar em termos dos *fins da educação* requer uma análise analítica e reflexiva que considere a cultura do povo e as características da sociedade para a qual se está realizando um projeto de educação, que transcenda o momento presente e as solicitações utilitárias, sem ignorá-los. Requer que estude as raízes do modo de ser desse povo, suas expectativas políticas e sociais, seu imaginário, bem como se avance no tempo, visualizando o seu futuro. Esse modo de proceder da Filosofia da Educação não pode se restringir aos resultados de uma enquete, por mais ampla que seja e que pergunte a toda população da respectiva sociedade o que deseja para si, no presente e no futuro. Necessita de ponderações sobre possíveis desdobramentos em termos éticos, gnosiológicos e ontológicos, trabalho a ser efetuado por filósofo da Educação Matemática em equipe com educadores matemáticos que se dedicam a outros aspectos dessa área, tais como: aprendizagem, ensino, avaliação e assim por diante.

O ato reflexivo não se volta apenas para algo que esteja ocorrendo na circunvizinhança ou abranja realizações profissionais, científicas, artísticas etc., mas abrange os atos da própria pessoa que reflete. É esta ação de se dar conta de si, do que se está fazendo na própria ação do fazer, que nos ajuda a transcender a ação prática e de visualizações de justificativas, ou seja, a *do como se faz* e *do por que se faz assim*, para se perceber fazendo, dando-se conta disso que se faz. É um tomar ciência de si e, com isso, aprofunda-se a constituição do conhecimento e expande-se sua abrangência, podendo-se caminhar em direção de assumi-lo no seu próprio modo de ser. O aprofundamento do conhecimento que se dá nesse processo de constituir-se, revela-se na atitude assumida pela pessoa.

Esse *dar-se conta de si* no próprio ato de realizar algo é um dos temas tratados pela Filosofia.

A Fenomenologia foca seus estudos na consciência e em seus atos, na intencionalidade que se mostra no movimento de se *ligar* ao que está no nosso entorno, percebendo-o e trazendo-o na percepção, aos atos da consciência e aos seus modos de expressão; à compreensão da constituição da pessoa e da comunidade; à constituição da subjetividade, da intersubjetividade e da objetividade do mundo-vida.

Entretanto essas ações podem ser solicitadas ou podem ocorrer de modo não temático. Podem se dar em atividades que realizamos em ações no nosso cotidiano, bem como ao nos depararmos com atividades de ensino e de aprendizagem de diferentes disciplinas que solicitam a atenção ao que se faz, dando-nos conta do que fazemos enquanto estamos fazendo.

Sobre Filosofia ***na*** *Educação Matemática*

O título deste subitem aborda acerca da presença da Filosofia no cotidiano da Educação Matemática, quando estamos junto aos nossos alunos ensinando e aprendendo. É nessa realidade do trabalho do professor que a sua atitude de sempre estar ciente de sua presença e da presença dos outros se impõe com força, fazendo a diferença na ação educadora.

Trata-se de uma atitude assumida ao realizar ações de ensinar e de aprender, quer seja trabalhando com alunos dos níveis infantis, do ensino básico, do superior e da pós-graduação.

É uma atitude, por exemplo, de não tomar o texto (qualquer que seja) como uma verdade em si, mas sempre problematizá-lo, abrindo caminho para que as pessoas envolvidas possam dizer o que estão entendendo, bem como possam expor suas dificuldades e sugestões e, assim, vai-se estabelecendo um diálogo entre todos. Essa atitude também abrange a abertura para a exposição do pensar e do conversar sobre as ideias subjacentes ao tema estudado, caminhando-se para uma meta-compreensão do que está sendo trabalhado.

Muitos educadores matemáticos pesquisadores ou que ensinam em diferentes níveis têm questionado destacar-se a Filosofia da Educação Matemática como tema de estudo e de pesquisa e de, em eventos científico-acadêmicos, abrirem-se espaços para GTs específicos sobre esse tema. Entendem, grosso modo, que os professores comprometidos com seus alunos fazem Filosofia da Educação Matemática.

Eu não entendo que o façam. Entendo que, de modo reflexivo, podem assumir uma *postura filosófica,* que é a esperada daqueles que não se satisfazem com atividades que conduzam apenas a cálculos, a resolução de problemas, a raciocínios algébricos e geométricos; no entanto investem esforços para que se compreenda o que está sendo solicitado, a importância disso que está sendo solicitado em termos sociais, econômicos e culturais; o próprio campo da Matemática; e que compreendam a si mesmos realizando atividades de ensino e de aprendizagem.

Da Filosofia da Educação Matemática é esperado um estudo aprofundado sobre o *ethos* de um povo, sobre valores assumidos, bem como sobre modos de conceber pessoa, mundo, conhecimento e avançando para a compreensão da Filosofia da Matemática. Da Filosofia na Educação Matemática é esperada uma atitude de ouvir o outro, de abrir-se ao diálogo, de aceitar diferenças, de solicitar análise e reflexão sobre o que está sendo ensinado e aprendido, de ponderar sobre os valores com que se evidenciam nessas análises.

Relevância da Filosofia da Educação Matemática na form/ação de professores de Matemática.

Entendo como sendo o núcleo da preocupação da Filosofia da Educação Matemática o professor de Matemática dar-se conta de si e do outro, dar-se conta da própria ação, entendida em termos cognitivos, lógicos e intersubjetivos, bem como saber realizar a análise dessa ação em termos das intencionalidades que o movem.

Para tanto, as ferramentas oferecidas pelo exercício filosófico são cruciais.

É importante para a compreensão do diferente e da visualização de horizontes possíveis, olhar-se para ocorrências específicas do cotidiano, buscando compreendê-las sob diferentes perspectivas e graus de proximidade e distanciamento. Isso contribui com a ação de focar e "des-focar" a intensidade de forças que estão agindo nessa realidade em que uns estão com os outros, em acordo e em desacordo, visando diferentes cenários.

Olhar o outro como igual, como corpo vivente que sente e que se percebe e que me percebe em nossa carnalidade, abre espaço para a solidariedade, para a constituição da intersubjetividade e para a possibilidade de pensar-com-o-outro. É nesse movimento de pensar-com que o professor pode *ouvir-se e ouvir* seu aluno, compreendendo os caminhos sinuosos percorridos no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Referências

BAUMANN, A.P.P. A Atualização do projeto pedagógico nos cursos de formação de professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: Licenciatura em Pedagogia e Licenciatura em Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, SP, 2013.

BICUDO, M.A.V. Formação do professor: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M.A.V. (org.) Formação de Professores? Da incerteza à compreensão. (2003). Bauru: EDUSC. Para download no site www.mariabicudo.org.br

BICUDO, M.A.V.; GARNICA, A.V.M. Filosofia da Educação Matemática. 4.a. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

BICUDO, M.A.V.; VENTURIN, J. Filosofando sobre Educação Matemática. Perspectivas da Educação Matemática. v.9, n.20,2016 - ISSN 2359-2842.

BUBER, M. Qué es el homebre? 6ªed. Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1967.

HEIDEGGER, M. Ser e Tempo. Petrópolis: Editora Vozes, 1988.

VENTURIN, J. A. A Educação Matemática no Brasil da perspectiva do discurso de pesquisadores. 2015. 541 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

Capítulo dois

Desenvolvimento curricular em educação matemática: possibilidade de (re)politização da esfera pública por meio da ação comunicativa

Deise Aparecida Peralta[1]
Harryson Junio Lessa Gonçalves[2]

Processos Formativos em Educação Matemática e Ação Política

Este texto propõe reflexões acerca do sentido político do desenvolvimento curricular no âmbito de processos formativos em Educação Matemática, tendo como referencial a teoria da Ação Comunicativa de Habermas (2001). Isto posto, considerando a Educação Matemática como ato político e uma de suas dimensões, os processos formativos da Educação Matemática Escolar – aquela curricularmente orientada –como ato político com potencial de construção de cidadania no âmbito do cotidiano da escola, pois é capaz de subsidiar tomada de posições orientadoras da ação humana em sociedade. Tais afirmações são possíveis, pois por meio da Educação Matemática Escolar, são dadas orientações no sentido de

---

[1] Professora do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia da UNESP campus Ilha Solteira e do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos também da UNESP. Bolsista DT II do CNPq.

[2] Professor do Departamento de Biologia e Zootecnia da Faculdade de Engenharia da UNESP campus Ilha Solteira e dos Programas de Pós-Graduação em Educação para Ciência e Ensino e Processos Formativos, ambos também da UNESP.

estabelecer valores e princípios a serem adotados na intervenção histórica a que cada indivíduo está sujeito e, "fundada na aceitação do outro como legítimo sujeito, apresenta-se como a realização da convivência pacífica e cooperativa que nega a dominação e labora em favor da democracia" (PARO, 2002, p. 17). Assim, processos formativos em Educação Matemática tornam-se atos políticos na medida que se pautam no princípio democrático de que todos devem ser partícipes tanto da matemática historicamente produzida como na reconstrução dela para orientar as decisões cotidianas de acordo com a realidade em que se situam. Tal perspectiva considera que o desenvolvimento curricular de matemática congrega as micropolíticas presentes na interação cotidiana da escola, conhecimento matemático e a perspectiva desse espaço como possibilidade de construção da cidadania.

Na interface do trinômio Educação Matemática-democracia-desenvolvimento curricular deve ser propósito, decidido e sistemático deste último, desenvolver a consciência nos indivíduos de suas possibilidades reflexivas, de voltar-se sobre si mesmos e sobre seus próprios processos de socialização para entender como se está configurando em cada um dos significados da matemática que compõem sua cultura e decidir sobre sua permanência ou modificação. Para tanto, pensar como as interações, os processos e os espaços de comunicação são constituídos no currículo é um dos elementos fundamentais para análise da dimensão política dos processos formativos, e que imprimem um sentido político, na e da Educação Matemática.

Nesse contexto, as reflexões aqui apresentadas buscam no filósofo e sociólogo alemão Jürgen Habermas uma fundamentação. O referido autor tem se de dedicado a teorizar sobre a politização da Esfera Pública, entendido como o espaço de participação em que o conceito de cidadania pode se materializar. A sua Teoria da Ação Comunicativa (TAC) se destaca na proposição de práticas que objetivem essa materialização, considerando interações pautadas em consensos, entendimentos, atos livres de assimetrias e coerções e visões de mundo negociadas. Pela forma como discute teoria e prática na sociedade científica contemporânea, a constituição da Esfera Pública como local legítimo de atuação política e, consequentemente, por questionar a produção de conhecimento na modernidade, o ideário do filósofo alemão têm potencial para contribuir com o campo da Educação Matemática, sobretudo com as discussões acerca de políticas e desenvolvimento curricular.

Ao questionar a produção de conhecimento na modernidade, na tentativa de recuperar o potencial educativo da formação da opinião pública, a sua dimensão polissêmica e não unidimensional, Habermas (1994) alerta sobre a dominação do sistema ocorrer pela interferência dos meios de comunicação que, utilizando a indústria do consumo, servem como fonte de manipulação e controle do espaço público de discussão. Nessa mercantilização cultural, predomina uma acomodação, substituindo a visão totalizadora do real por uma atitude imediatista de consumo, cujo foco reside no desvio dos estímulos que conduzem os indivíduos ao uso público da razão. A exigência que se faz a um currículo é uma mudança de atitude frente ao discurso de formação, para que se possa formar para decodificar a manipulação ideológica produzida na sociedade atual, em direção ao cultivo dos valores democráticos na educação e no mundo da vida. O autor considera que a ciência se aliou ao capitalismo, tornando-se força produtiva e instrumento ideológico. “Enquanto tudo o mais está sob suspeita e ameaçado de sucumbir, o capitalismo, como modelo de desenvolvimento social e econômico baseado numa cientificidade técnica, mantém-se imponente diante de todas as demais formas de organização e de produção” (p.45).

A proposta habermasiana mais otimista e promissora é a de que podemos agir no mundo em processos formativos que visem à emancipação pelo que ele chama de “repolitização da Esfera Pública”. A Esfera Pública é a intermediária entre sistema e mundo da vida, se constituindo espaço de igualdade de participação, de racionalidade na busca de entendimentos, de universalidade de publicidade crítica. Entretanto, com a dominação capitalista, ela se "despolitizou", ou seja, perdeu seu caráter político, justamente pela influência crescente da ciência e da tecnologia, que forneceram ao poder novas formas de legitimação, fazendo com que a discussão pública racional deixasse de influenciar decisões políticas. A possibilidade de repolitização da Esfera Pública está para Habermas nas organizações que se encarregam da formação humana e "são especializadas na geração e propagação de convicções práticas, ou seja, em descobrir temas de relevância para o conjunto da sociedade, em contribuir com possíveis soluções para os problemas, em interpretar valores, produzir bons fundamentos, desqualificar outros" (HABERMAS, 1990, p. 110). Assim, currículos de matemática, que privilegiem processos formativos em Educação Matemática e que se constituam espaços de Esfera Pública, resgatariam a possibilidade de a opinião pública voltar a informar e a criticar os direcionamentos sistêmicos tão impregnados de cientificidade técnica.

Habermas, Esfera Pública e Ação Comunicativa

Jürgen Habermas é um dos principais expoentes da segunda geração da Escola de Frankfurt, chamada originariamente de "Instituto para a Pesquisa Social", que surgiu motivado pelos estudos dos movimentos de classes. A articulação da Teoria Crítica, como categoria e fundamento de legitimação, representada pela Escola de Frankfurt, fundamenta-se na tradição racionalista que remonta ao criticismo kantiano, passando pela dialética ideal hegeliana, pelo subjetivismo psicanalítico freudiano e culminando na reinterpretação do materialismo histórico marxista. Outro diferencial é a postura de distanciamento em relação ao marxismo ortodoxo, sem abandonar os ideários utópicos, revolucionários e emancipatórios.

> Habermas está ligado à Escola de Frankfurt, um movimento intelectual que procurou introduzir o pensamento marxista na

> Alemanha, após a primeira guerra mundial. [...] ele se manteve fiel ao projeto da escola, que é uma teoria social crítica com intenções práticas, bem como ao seu programa caracterizado por uma pesquisa interdisciplinar, que procura estabelecer uma nova relação entre a filosofia e as ciências humanas. Assim ele retoma o caminho de uma teoria crítica da sociedade, com a mudança de paradigma de razão instrumental para a razão comunicativa (ANDRADE, 1998, p. 109).

Habermas (2001, 2003) concebe a sociedade moderna por meio de duas categorias: sistema e mundo da vida. Sendo o sistema regido pela razão instrumental, ligado a processos do mundo material e constituído por dois subsistemas, Estado e Mercado, que são responsáveis pelo desenvolvimento de mecanismos autorreguladores: o dinheiro e o poder. O mundo da vida se refere "à maneira como os atores percebem e vivenciam sua realidade social" (FREITAG, 1993, p. 65), sendo correlato aos processos de entendimento, pois os sujeitos se entendem comunicativamente sempre nesse plano. (HABERMAS, 2003).

A racionalização do mundo da vida possibilita a discriminação de subsistemas independentes, ao passo que amplia o horizonte utópico de uma sociedade burguesa, na qual as dimensões formalmente organizadas em mercado e aparato estatal constituem os fundamentos para uma fase pós-tradicional de esfera privada e Esfera Pública. Ao aplicar a dualidade sistema-mundo da vida ao problema da sociedade burguesa, o resultado é uma estrutura diferente da concepção marxista de mediação entre sociedade civil e estado. Essa reformulação distingue a sociedade da economia privada, delegando à Esfera Pública as funções de proteger e garantir a autonomia do mundo da vida frente aos imperativos sistêmicos, bem como a função simbólica de integração social (HABERMAS, 1984). Nesse sentido, cabe à Esfera Pública ser o espaço comunicativo que confere dinamicidade e legitimidade ao mundo da vida, lembrando que o sistema não consegue, e nem se propõe a conseguir, desempenhar este papel. A Esfera Pública surge como uma espaço de tensão no qual conflitam princípios opostos de integração social.

A categoria de Esfera Pública, ao longo da obra de Habermas, tem sua estrutura conceitual teórica toda modificada. Essa "reformulação" resulta em importante autocrítica do autor, permitindo duas vias de leitura: a reformulação do conteúdo da Esfera Pública e uma reformulação do lugar que ela ocupa na relação sistema-mundo da vida. Na terminologia política habermasiana, pós evolução conceitual, Esfera Pública é a categoria normativa fundamental do processo deliberativo; é a responsável pela elaboração de temas e questões politicamente relevantes que emergem da esfera privada e das esferas informais da sociedade e pelo encaminhamento desses para o tratamento político formal; é uma estrutura de comunicação pública que, fundamentada numa racionalidade comunicativa, oportuniza formação da opinião e da vontade política.

A Esfera Pública se configura como espaço social de emersão da opinião pública concomitante à formação discursiva da opinião e da vontade política. Em seu âmago, conflitos em torno do controle dos fluxos comunicativos percorrem a fronteira, por vezes não tão bem delimitada, entre o mundo da vida e o sistema.

> A Esfera Pública constitui uma "caixa de ressonância", dotada de um sistema de sensores sensíveis ao âmbito de toda sociedade, e tem a função de filtrar e sintetizar temas, argumentos e contribuições, e transportá-los para o nível dos processos institucionalizados de resolução e decisão, de introduzir no sistema político os conflitos existentes na sociedade civil, a fim de exercer influência e direcionar os processos de regulação e circulação do poder do sistema político, através de uma abertura estrutural, sensível e porosa, ancorada no mundo da vida (LUBENOW, 2007, p.113).

Segundo Habermas (1984), o conceito de Esfera Pública tende a apresentar deficiências na estrutura, pois um espaço público de comunicação pública e com liberdade de argumentação crítica, passa a ser espaço de manipulação e dominação, rendido ao poder que corrompe eficazmente. A emancipação política da Esfera Pública no capitalistalismo se converte em despolitização da sociedade. Tal despolitização caracteriza-se pela desintegração da Esfera Pública ocasionada pela sua mudança estrutural e funcional e pelo abandono da ideia de neutralizar a dominação e racionalizar o poder por meio de um espaço público de exercício da comunicação. O questionamento acerca da despolitização permite compreender os fundantes da sociedade contemporânea, suas instituições e questões políticas cruciais, possibilitando compreender as relações entre estado e sociedade civil na transição do capitalismo de fase liberal para o capitalismo de fase avançada como determinante de intervenção estatal.

A origem da discussão habermasina sobre a "Esfera Pública" está na sua tese de livre docência, intitulada "Mudança Estrutural da Esfera Pública". Nessa obra, onde já constam embriões dos temas em que iria concentrar esforços nas décadas seguintes, Habermas mostra a origem histórica da categoria, bem como as mudanças ocorridas, a partir da mudança das relações entre estado e sociedade. O principal objetivo é a análise de estrutura e função, esclarecendo que os diferentes significados de "Esfera Pública" se originam de diferentes fases históricas: no mundo grego, no mundo feudal (esfera de representação pública), na sociedade burguesa (esfera de opinião pública), no mundo contemporâneo (esfera pública manipulativa), bem como na transformação do modelo liberal (esfera de transição do estado constitucional para o estado social).Assim o sendo, Habermas (1984) concebe a "esfera pública" como uma categoria característica de uma dada época, descrevendo o "espaço público"[3] como algo inscrito num vasto campo de uma

[3] Habermas assume "público" em contraposição ao que é privado, como prática ou com efeito de publicidade, por contraponto ao que é sigiloso. É aquilo que para ser precisa de um público que o publicite. Habermas defende que a noção de público surge na Grécia antiga com a distinção entre o

época com características e motivações próprias (HABERMAS, 1984, p. 9)

Nessa mudança estrutural e funcional, Habermas (1984) aponta para o enfraquecimento da Esfera Pública como instância institucional política e a consequente despolitização da sociedade, revelando um caráter nefasto da política nas sociedades capitalistas avançadas que, excluindo da comunicação pública temas inconvenientes para o sistema do poder, levam os indivíduos a se calarem diante de propostas que ferem os interesses gerais e públicos. Esse diagnóstico negativo expõe o problema das reais possibilidades de efetivação dos princípios estruturantes da Esfera Pública e as condições institucionais para o seu exercício, ficando em aberto uma possível repolitização da Esfera Pública, uma perspectiva de identificação de estratégias para preservar o seu princípio normativo.

Para Habermas (1984), o conceito de razão como ideal iluminista mantém-se apenas na dimensão técnico-científica, instrumental e teleológica, sobremaneira sobre a relações de dominação e à manipulação. A razão então se desvinculou da práxis, não restando possibilidades de racionalidade aplicada à dimensão prática. Os pensadores da chamada primeira geração da Escola de Frankfurt, ao problematizarem a modernidade, criticam radicalmente o uso da razão e eliminam qualquer possibilidade objetiva de emancipação dos indivíduos por essa via, ideia presente no movimento iluminista desde o século XVIII e pretensão inicial da Teoria Crítica (ADORNO; HORKHEIMER, 1985). Os princípios marxistas que se afirmaram nos primeiros dias da Escola, que proclamava uma nova relação da teoria com a pesquisa empírica (HORKHEIMER, 1980), de 1920 a 1960 ficou cada vez mais distante. Em consonância a isso, e a título de exemplo, temos em Adorno (2009) uma preocupação cada vez menor em tecer crítica à

---

que é pertencente ao âmbito doméstico, que é particular ao individual, e ao que se manifesta em espaço que é comum a todos os cidadãos livres.

economia política, culminando na sua dialética negativa, demonstrando um ceticismo crescente sobre as possibilidades históricas da revolução proletária idealizada por Marx.

Não sem justificativas os referidos pensadores teceram considerações tão pessimistas sobre seu tempo. Tal fato se deve, em grande medida, por terem presenciado o fascismo e o nazismo em ascensão na Europa, o stalinismo na União Soviética e a cultura mercantilizada de massas nos Estados Unidos. Essas três formas de sociedade moderna levaram a confirmação de suas intuições teóricas mais desesperançadas. A Teoria Crítica, que havia se distinguido da teoria "tradicional" por seu potencial em especificar os condicionantes reais de uma situação histórica e com isto fomentar os processos de emancipação e superar o domínio, a coerção e a repressão, não poderia fugir da tarefa de oferecer uma explicação científica da dinâmica da sociedade contemporânea. Assim o sendo, Habermas sente necessidade de revisitar os princípios marxistas, mas mostrando que a análise de Marx, sobre as sociedades capitalistas no século XIX, já não mais se aplicavam às sociedades capitalistas atuais, propondo uma revisão conceitual dentro da Teoria Crítica.

Partindo do paradigma de uma teoria da linguagem e da Ação Comunicativa, Habermas propões uma distinção entre tipos de racionalidade de ação que não encontramos em Marx, Weber, Adorno ou Horkheimer. A elaboração de Habermas (2001, 2003) pode ser tida como uma alternativa à explicação mais convencional dentro do marxismo sobre as crises. Ele reexamina o sentido das crises sociais e, a partir da unificação metodológica da teoria da ação, da teoria dos sistemas e da competência comunicativa, publica sua obra mais importante "A Teoria da Ação Comunicativa (TAC)", seu constructo teórico próprio.

O conceito de Ação Comunicativa é definido sinteticamente por Habermas (2001, 2003) como a "interação entre ao menos dois sujeitos capazes de linguagem e ação que (seja com meios verbais, não verbais e/ou meios extra verbais) iniciam uma relação interpessoal". Nesse processo, os atores "buscam entender-se sobre uma situação de ação para poder assim coordenar em comum acordo seus planos de ação e com eles suas ações. O conceito principal, o de interpretação, se refere primordialmente à negociação de definições de situações suscetíveis de consenso" (HABERMAS, 2003, p. 124).

Dentro dessa lógica, Habermas (1994, 2001, 2003) apresenta a racionalidade comunicativa em oposição à racionalidade instrumental. A primeira surge como norteadora às interações mediadas simbolicamente, não excluindo a possibilidade de uma racionalidade teleológica (PERALTA, 2012). A segunda pode assumir a forma de racionalidade estratégica quando orienta as ações dos sujeitos no mundo no que diz a organização dos meios de interação ou à escolha de possibilidades:

> A ação instrumental orienta-se por regras técnicas que se apoiam no saber empírico. Estas regras implicam em cada caso prognoses sobre eventos observáveis, físicos ou sociais: tais prognoses podem se revelar verdadeiras ou falsas. O comportamento da escolha racional orienta-se por estratégias que se baseiam num saber analítico. Implicam deduções de regras de preferências (sistemas de valores) e máximas gerais: estas proposições estão deduzidas de um modo correto ou falso (HABERMAS, 1994, p. 57).

Em síntese, a ação estratégica faz uso da linguagem apenas como meio de transmissão de informações, buscando influenciar os outros sujeitos do discurso de maneira a impor posições; ao passo que a Ação Comunicativa eleva a linguagem ao status de fonte de interação social com potencial consensual dos processos linguísticos visando à promoção de Entendimento (PERALTA, 2012).

Currículo de Matemática e a Perspectiva Crítica

Em Habermas (1984, 1994, 2001, 2002, 2003), a formação humana assume conotações, notadamente, processuais com o compromisso de formar para a superação de qualquer tipo de coerção, de dominação seja externa, pessoal ou social. Nesse sentido, um currículo deve ser pautado por processos formativos voltados a um só interesse: o emancipatório, que antecede qualquer interesse humano, tendo como características a comunicação por meio da linguagem, a ação guiada para o entendimento racional (razão comunicativa) e a busca pela experiência constante da reflexão e autorreflexão críticas. Segundo Habermas (2001), a reflexão crítica é emancipatória quando contribui para desvendar os sentidos ocultos da comunicação, bem como aquilo que está distorcido (ORQUIZA DE CARVALHO, 2005). Processos formativos em Educação Matemática pautados em Ação Comunicativa concebem a formação e a atuação social em termos dos conflitos dos quais os próprios sujeitos participam e que, portanto, os legitimam com vez e voz.

O controle social que um currículo de matemática pode realizar depende da perspectiva teórica que o orienta. Kemmis (1988) propõe uma classificação das teorias curriculares em técnicas, práticas e críticas. As teorias técnicas expressam o currículo como um plano estruturado de aprendizagens centradas nos conteúdos (PACHECO, 2001a, OLIVEIRA; PACHECO, 2013). Tendo em Tyler (1983) o principal teórico, conceitua o currículo como um meio para a obtenção de objetivos, especificados em função dos resultados esperados.

A teoria prática assume uma posição de currículo como um processo, ou seja, "não como uma coisa física, mas como a interação que ocorre entre professores, alunos e conhecimento, ou seja, aquilo que efetivamente acontece dentro de uma sala de aula" (SMITH, 1996, p. 6). Caracterizada por um certo discurso "humanista" e uma prática "racional" esta visão do currículo é o resultado das intensas discussões curriculares que ocorreram na década de 70 (PACHECO, 2001a), criando as condições para a definição de um novo paradigma educacional caracterizado por um modelo de comunicação bidirecional, em que o professor, embora mantendo o protagonismo no processo (ele continua a ser a principal fonte do conhecimento), olha o currículo não como um conjunto de prescrições, mas como algo em construção resultante da interação com os alunos, o que implica uma tomada de decisões por parte destes sobre os propósitos, o conteúdo e o processamento do chamado desenvolvimento curricular.

Finalmente, o teor emancipatório da Teoria Crítica considera a relação entre a teoria e a prática: é a práxis (a ação reflexiva) que conduz à emancipação e, por outro lado, à crítica da ideologia que configura todo o projeto curricular que, através do diálogo e da negociação, vão reconhecendo os seus aspectos problemáticos.

Para Berticelli (1988), perspectivas teóricas de currículo tem sido pauta constante nos o debate teórico sobre os problemas curriculares. Debates se intensificaram a partir da década de 80 em todo o Brasil, fomentados por uma literatura de cunho mais progressista, numa tentativa de transformar o ensino de matemática tecnicista que era desenvolvido desde a década de 1960. Muitos debates começam a ser travados, demonstrando a preocupação em superar a concepção de currículo de matemática como elenco de disciplinas ou listagem de conteúdo. O discurso curriculista incorpora a defesa de que todas as atividades da escola, muito além da matriz curricular de conteúdos disciplinares, são significativas para a formação do aluno (PACHECO, 2014). Nesse contexto histórico, as classes trabalhadoras começam a se organizar em busca de reivindicações, muitas discussões sobre os problemas com o ensino de matemática são realizadas e uma perspectiva crítica surge com intensidade. A influência norte americana diminui e o currículo passa a ser visto de outra forma: como uma questão de saber, identidade e poder (APPLE, 1982).

Dada à diversidade, que cada teoria curricular contém, é mais adequado o uso do termo teorias e perante a pluralidade de teorias, propostas à luz de diferentes campos disciplinares, com mais peso para os da Filosofia e Sociologia, e explorando a leitura do texto “Teoria Tradicional e Teoria Crítica”, publicado originalmente em

1937, por Max Horkheimer, fazemos defesa aqui do potencial das teorias críticas de currículo para fundamentar desenvolvimento curricular em matemática. Nesse sentido, “[...] as teorias críticas de currículo, ao deslocar a ênfase dos conceitos simplesmente pedagógicos de ensino e aprendizagem para os conceitos de ideologia e poder, por exemplo, permitiram-nos ver a educação de uma nova perspectiva” (SILVA, 2007, p. 17). Para o mesmo autor, “[...] as teorias tradicionais eram teorias de aceitação, ajuste e adaptação. As teorias críticas são teorias de desconfiança, questionamento e transformação radical” (SILVA, 2007, p. 30).

Pacheco (2001b, p. 51) diz que “a Teoria Crítica é um espaço de contestação, outra forma de olhar a realidade e um compromisso político com o que pensamos e o que fazemos”. A proposta de um currículo crítico de matemática exerce influência na mudança de atitudes e preocupação de transformação da realidade existente. O currículo de matemática pode ser visto a partir da Teoria Crítica, numa vertente habermasiana, como espaço de poder, de tensão entre Sistema e Mundo da Vida, sendo uma construção social que prioriza a problematização, a interação sem simetrias entre todos os envolvidos nos processos formativos, instigando a fala com a realidade orientado pela razão comunicativa. Está posta então uma concepção diferenciada de currículo de matemática que considera a cultura de todos os grupos sociais e visa produzir mais igualdade no conjunto global das relações sociais às quais o sistema educacional está vinculado, tal como defendem Connell (1992, 1995), Moreira (2001), Moreira e Candau (2003), Silva (2000) e Veiga-Neto (2001, 2004).

Segundo Pacheco (2016), currículo é um itinerário de educação e formação, com uma identidade cultural, histórica e socialmente contextualizada. Nesse caso, um currículo de matemática é tanto um produtor quanto um produto de cultura e, portanto, desvendar as relações de poder nas práticas de escolarização da matemática é pré-condição para modificar os processos formativos na direção de se construir outra experiência de Educação Matemática, no lugar daquela que reserva o fracasso para as camadas menos favorecidas da sociedade.

Um currículo de matemática precisa ser entendido como um projeto construído na diversidade e na pluralidade não só na abordagem da matemática escolar, mas, de igual modo, no desvendamento de certos processos e práticas de poder e de padronização cultural que existem nos processos formativos em Educação Matemática que sistematizam o desenvolvimento curricular. Talvez a tarefa mais crucial da teorização crítica do currículo de matemática consista na problematização da Educação Matemática a partir das identidades dos sujeitos, e suas relações com os outros, em ligação estreita com lugares e tempos de diferenciação social e sua relação com o conhecimento matemático, considerando ainda o desenvolvimento de um espírito crítico que permita o combate a um dos riscos da modernidade que é o da manipulação e da ideologização da opinião pública, o combate a todo o tipo de exclusão na escola e na sociedade com particular atenção às tão faladas dificuldades de aprendizagem de matemática.

Nesse sentido um currículo de matemática fundamentado nos conceitos de Ação Comunicativa e de Esfera Pública deve ser entendido como o lugar do que é comum, do não-privado, onde os que ali se encontram estão em condições essenciais de igualdade. Tampouco os processos formativos em Educação Matemática, como sistematização do desenvolvimento curricular, podem ser entendidos como uma experiência da vida privada e sim como exercício de postura ética que entende a democracia como uma luta para defender os direitos civis e melhorar a qualidade da vida humana.

Desenvolvimento Curricular de Matemática e a (re)politização da Esfera Pública

A sociedade democrática seria, para Habermas (2001, 2003, 2004), aquela que apresenta condições para a produção de consensos parciais, baseados na argumentação. A vida democrática depende do dinamismo de processos formativos que se constituam em uma Esfera Pública para além do sistema, que tematiza a agenda política em relação à qual o sistema deve reagir e o mundo da vida se proteger.

O ideal da Modernidade se perdeu ao desviar a razão humana para a razão instrumental, nos desencorajando a falar, A nossa capacidade de argumentação foi colonizada pelo sistema, perdendo seu caráter libertário e emancipatório, se colocando sob os imperativos sistêmicos colonizante de todas as esferas sociais. O uso da razão passa a expressar modelos e técnicas na produção, segundo fins da economia, do poder estatal e da lógica mercadológica de todas as ações coletivas. A ciência, a tecnologia, a educação, o estado, o direito e a cultura passaram a ser a linguagem do poder dominante (HABERMAS, 1994).

Nesse sentido, a Educação Matemática pode ser a via que assegure a nossa relação com a matemática, resguardando o uso da razão para além dos padrões instrumentais da racionalidade técnica, pois é possível, nos processos formativos que a envolvem, considerar que todos têm capacidades de linguagem, todos têm interesses e todos tem o direito de interagir com o conhecimento matemático constituído de forma histórica e social. Tais processos formativos materializam um desenvolvimento curricular fundamentado em princípios democráticos que cultivam e promovem a comunicação entre estes sujeitos a fim de produzir entendimentos universais para orientar as relações sociais e o poder. Tal proposição é uma crítica que procura dar conta das patologias da Modernidade que aponta as crises de fundamentos das categorias de poder (estado) e do saber (razão) e que, invariavelmente, impactam, dentre tantas outras coisas, nas formas de conceber, fazer e ensinar matemática. Neste sentido, coloca-se sempre os desafios de uma Educação Matemática que redimensione a emergência de um novo tipo de racionalidade. Diante disso, o desenvolvimento curricular em matemática pode ser uma oportunidade de aproximação de uma proposta teórica que parta da concepção de que Educação Matemática pode se constituir como espaço e possibilidade de “repolitização da Esfera Pública por meio da Ação Comunicativa”. Nesse sentido, os processos formativos, que se constituam espaços de Esfera Pública, em Educação Matemática aparecem, numa perspectiva crítica, como a figura central de toda a estrutura organizacional do ensino de matemática pautado em Ação Comunicativa.

De acordo com princípios habermasianos, a Esfera Pública não pode ser entendida como uma instituição, nem como uma organização, por isso sua constituição em processos formativos em Educação Matemática não constitui uma estrutura normativa capaz de diferenciar entre competências e papéis, nem regula o modo de pertença a uma organização; e sim, como uma rede adequada para a comunicação de conteúdo, tomadas de posição e opiniões; nela os fluxos comunicacionais são filtrados e sintetizados, a ponto de condensarem em opiniões públicas a respeito de temas específicos. Sendo assim, trata-se, principalmente de estabelecer uma estrutura comunicacional do agir orientado pelo entendimento, a qual tem a ver com um espaço social, para conceber, fazer, aprender e ensinar matemática gerado no agir comunicativo, não com as funções nem com os conteúdos da comunicação cotidiana. O elemento comunicacional acrescido ao espaço público possibilita a democratização das relações sociais que permeiam a Educação Matemática e ao mesmo tempo permite um estreitamento com uma dimensão política, a democratização dos conteúdos e a pluralização de opiniões.

A repolitização da Esfera Pública, cria uma possibilidade de identificar na educação um princípio normativo da Esfera Pública, mas diferente das formas burguesas, onde a matemática pode ser, curricularmente, compreendida para além da racionalidade técnica que a apresenta como ferramenta para validar fenômenos físicos e sociais. Antes disso, a base do desenvolvimento curricular passa a ser processos formativos pautados no agir comunicativo, na constituição de competências argumentativas que problematizem as bases conceituais, epistemológicas e metodológicas, bem como a dimensão social, política e histórica, da matemática e sua vertente educacional.

A questão curricular é algo muito importante, pois trata-se de noção identitária que confere não neutralidade aos processos formativos e os torna envoltos de posicionamentos em relação ao conhecimento matemático. Posicionamentos que podem vir a fundamentar decisões importantes, de dimensões sistêmicas e também do mundo da vida, muitas vezes, pautadas em modelos matemáticos que não só auxiliam, mas acabam se tornando a palavra final sobre o que fazer, tornando a matemática um poderoso fenômeno político com potencial de transformação ou reprodução social. Diante disso, reforçamos a necessidade de uma perspectiva crítica de currículos de matemática, enfatizando uma perspectiva de não aceitação de ajustes e adaptações, mas de desconfiança, questionamento e transformação radical do contexto social. Desenvolvimento curricular de matemática trata-se de ato político a ser constituído em constante vigilância crítica, no questionamento da realidade. Assim o sendo, a Educação Matemática e o currículo de matemática podem ser projetos de questionamento e argumentação, construídos na diversidade e pluralidade de marcas pessoais e sociais, compreensíveis pelo agir comunicativo, definidos em espaços e tempos subjetivos, em espaços e tempos sociais, vinculados aos sujeitos e constituídos em Esfera Pública.

O que está em questão não é valor do currículo de matemática. A questão é que a Educação Matemática e seus processos formativos, responsáveis pelo desenvolvimento curricular, devem tomar consciência de si mesmos, dos seus potenciais de e para o esclarecimento (resguardando o mundo da vida e resistindo aos avanços sistêmicos), de retomada dos ideais emancipatórios da razão e da possibilidade de (re)politizar a Esfera Pública. Não se trata da conservação do passado, mas de resgatar a esperança passada. Isto posto, pois, diante da (des)politização atual, o passado prolonga-se como destruição do passado e ceifador de possibilidade futuras.

Referências

ADORNO, T.; HORKHElMER, M. *Dialética do Esclarecimento:* fragmentos filosóficos. Tradução de Guido Antônio de Almeida. Rio de Janeiro: Zahar, 1985.

ADORNO, T.W. *Dialética negativa.* Trad. Marco Antônio Casanova. São Paulo: EDUNESP, 2009.

ANDRADE, C. J. A contribuição de Habermas para a Hermenêutica Jurídica. *Revista de Estudos Jurídicos da UNESP*. ano 3, n. 6, pp. 109-124. jul-dez. 1998.

APPLE, M.W. *Ideologia e Currículo.* São Paulo: Brasiliense, 1982.

BERTICELLI, I. A. Currículo: Tendências e Filosofia. In: COSTA, M. V. (org). *O currículo nos limiares do contemporâneo.* Rio de Janeiro: DP&A, 1998. p. 159-175.

CONNELL, R.W. Justiça, Conhecimento e Currículo na Educação Contemporânea. In.: SILVA, L. H.; AZEVEDO, J. C. *Reestruturação Curricular:* Teoria e Prática no Cotidiano da Escola. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

CONNELL, R.W. Política Educacional, Hegemonia e Estratégias de Mudança Social. *Teoria e Educação*, n, 05, p. 66-80, 1992.

FREITAG, B. Habermas e a filosofia da modernidade. *Perspectivas: Revista de Ciências Sociais*, v. 16, n. 1, 1993.

HABERMAS, J. *A ética da discussão e a questão da verdade.* São Paulo: Martins Fontes, 2004.

HABERMAS, J. Acções, actos de fala, interacções linguisticamente mediadas e o mundo vivo. In HABERMAS, J. *Racionalidade e comunicação.* Lisboa: Edições 70, 2002.

HABERMAS, J. Soberania popular como procedimento. *Novos Estudos CEBRAP*, n. 26, p.100-113, 1990.

HABERMAS, J. *Técnica e ciência como "ideologia".* Lisboa: Edições 70, 1994.

HABERMAS, J. *Teoría de la acción comunicativa I:* racionalidad de la acción racionalización social. 3ª ed. Madri: Taurus, 2001.

HABERMAS, J. *Teoría de la acción comunicativa II:* crítica de la razón funcionalista. 4ª ed. Madri: Taurus, 2003.

HABERMAS, J. *Mudança Estrutural da Esfera Pública:* investigações quanto a uma categoria da sociedade burguesa. Tradução, Flávio R. Kothe. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1984.

HORKHEIMER, M. Teoria Tradicional e Teoria Crítica. *Os Pensadores.* São Paulo: Abril Cultural, 1980.

KEMMIS, S. *El curriculum:* más allá de la teoría de la reproducción. Madrid: Morata, 1988.

LUBENOW, J. A. A categoria de Esfera Pública em Jürgen Habermas: para uma reconstrução da autocrítica. *Cadernos de Ética e Filosofia Política.* v. 10, p.103 – 123, 2007.

MOREIRA, A. F. A Recente Produção Científica sobre o Currículo e Multiculturalismo no Brasil (1995 – 2000): avanços, desafios e tensões. *Revista Brasileira de Educação*, n°18, p. 65-81, 2001.

MOREIRA, A. F; CANDAU, V. M. Educação Escolar e Cultura(s): construindo caminhos. *Revista Brasileira de Educação,* n. 23, p.156-167, 2003.

OLIVEIRA, M. R.; PACHECO, J. A. (Org.). *Currículo, didática e formação de professores.* Campinas: Papirus, 2013.

ORQUIZA DE CARVALHO, L. M. *A educação de professores como formação cultural:* a constituição de um espaço de formação na interface entre a universidade e a escola. Tese (Livre- Docência.). UNESP: Ilha Solteira, 2005.

PACHECO, J. A. *Currículo:* teoria e práxis. Porto: Editora Porto, 2001a.

PACHECO, J. A. Teoria curricular crítica: os dilemas e (contradições) dos educadores críticos. *Revista Portuguesa de Educação.* p. 49-71, 2001b.

PACHECO, J. A. *Educação, Formação e Conhecimento.* Porto: Porto Editora, 2014.

PACHECO, J. A. On the Notion of Curricular Transformation. *Cadernos de Pesquisa***,** v. 46, n. 159, p. 64-77, 2016.

PARO, V.H. Implicações do caráter político da educação para a administração da escola pública. *Educação e Pesquisa,* São Paulo, v.28, n.2, p. 11-23, jul./dez. 2002.

PERALTA, D. A. *Formação Continuada de Professores de Matemática em Contexto de Reforma Curricular:* contribuições da Teoria da Ação Comunicativa. Tese (Doutorado em Educação para Ciência). UNESP: Bauru, 2012.

SILVA, T. T. *Documentos de identidade:* uma introdução às teorias do currículo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

SILVA, T. T. *Teorias do currículo:* uma introdução crítica. Porto: Porto Editora, 2000.

SMITH, M. *Curriculum Theory and Practice,* 1996. [online]. Disponível para download em <http://www.infed.org/biblio/b-curric.htm>. Acesso em 21 de junho de 2017.

TYLER, R. W. *Princípios Básicos de Currículo e Ensino.* Trad. Leonel Vallandro, 7. ed. Porto Alegre – Rio de Janeiro: Globo, 1983.

VEIGA-NETO, A. Currículo, cultura e sociedade. *Educação UNISINOS*, v.8, n.15, p. 157-171, 2004.

VEIGA-NETO, A. Curriculum y exclusión social. *Kikiriki*, a.XIV, n.59-60, p. 45-49, 20

Capítulo três

Dialética e matemática em Marx

Ricardo Mendes Grande[1]
Thaís Helena Smilgys[2]

Introdução

Smolinski (1977, pp. 1193) nos informa de que “os ditos manuscritos matemáticos contém cerca de 1,000 páginas escritas à mão, as quais cobrem um amplo espectro de tópicos e se estendem por um período de um quarto de século, de 1858 à morte Marx em 1883”. É importante saber que uma versão completa e bilingue (Russo/Alemão) só foi publicada em 1968 sob a coordenação de Yanovskaia. A nossa análise terá como base a edição inglesa dos manuscritos (Marx, 1983)[3]. Curiosamente, não encontramos em seus manuscritos uma única menção ao trabalho de Berkeley (*The Analyst*), o que é estranho, visto Marx ter tido um matemático de Cambridge, Samuel Moore, como o seu mentor intelectual em assuntos matemáticos. Quanto aos motivos que levaram Marx a estudar cálculo diferencial, não há indícios deles nos textos que analisamos (Marx, 1983).

---

[1]Professor substituto na Universidade Federal de Alfenas. E-mail: rekdinhopoetico@gmail.com

[2]Estudante de doutorado em Direito pela USP. E-mail: thsmilgys@gmail.com

[3]Marx divide a história do Cálculo em três movimentos: cálculo diferencial e integral místico de Newton e Leibniz, o cálculo diferencial racional de D’Alembert e Euler e o cálculo algébrico de Lagrange.

Marx e Matemática

"Nunca me senti em casa com a aritmética" (Works V40:244)

Seguindo Smolinski[4] (2014), parece-nos óbvio que Marx não tinha desdém pelo uso de métodos matemáticos na economia. O que nos parece mais claro são as suas limitações técnicas em matemática. No Capital, a sofisticação das ferramentas matemáticas realmente era limitada às quatro operações matemáticas, além de cálculo de percentagens - ver (Idem, p. 1190). O que teria, então, levado Marx a estudar o cálculo diferencial? Smolinski nos diz que (Idem, p. 1194):

Em particular, durante o período de sua preocupação mais intensa com o cálculo diferencial, 1878-1883, seus objetivos principais foram reformular seus fundamentos teóricos e filosóficos exibindo o seu desenvolvimento a partir da álgebra elementar para representar a operação de diferenciação[5] como um caso particular da sua lei dialética da "negação da negação".

Apesar de Marx não ser explicito quanto ao que o levou aos seus estudos, e se referir à *lei da negação da negação* em uma única passagem dos seus manuscritos (Marx, 1983, p. 3), acreditamos e sustentamos que não teve sucesso, caso o seu intuito fosse o de encontrar no processo de derivação um exemplo de uma lei dialética (como discutiremos na seção terceira). Não tiramos de Marx os seus méritos em seus manuscritos, mas não atribuiremos a ele[6] aquilo que não estiver presente em seus escritos.

---

[4]Existe a discussão de que Marx teria sido responsável pelo atraso da economia soviética devido ao fato dos seus herdeiros considerarem o uso dos métodos matemáticos como anti-marxistas – ver (Smolinski, 2014, pp. 1189). Não é de nosso interesse entrar nessa discussão.

[5]*Derivação* e *diferenciação* são definições distintas, porém, matematicamente equivalentes – ver (Almay, pp. 145-146).

[6]Houve grandes homens capazes de dar contribuições substanciais e duradouras à matemática, dentre eles, Gauss, von Neumann, Laplace, Euler, Lagrange, Cauchy, Leibniz, Newton, etc. Todavia, são poucos comparados com a quantidade de pessoas existentes em seus períodos de produtividade.

Sobre o conceito de função derivada

Escrito em 1881 (Marx, 1983, p. 3-14), o seu "Sobre o conceito de função derivada" é um trabalho em que Marx se detém no cálculo de derivadas de algumas funções assaz simples. O seu tratamento é completamente algébrico, não há referências a métodos de cálculo de tangentes, interpretações geométricas ou qualquer coisa do tipo.

O primeiro exemplo que Marx toma (idem, p. 3) é o de uma função linear $y = ax$. Na sua notação para $y_1 = ax_1$, teremos: $y_1 - y = a(x_1 - x)$. Claro que, para $x_1 = x, y_1 = y$, a expressão $y_1 - y = a(x_1 - x)$ nos dará:

$$0 = a.0 = 0$$

Aqui Marx nos diz que "a grande dificuldade em entender a operação diferencial (como na *negação da negação*, geralmente) repousa precisamente em ver *como* ela difere de tal procedimento simples e, entretanto, leva a resultados reais" (idem, ibidem). Tomando agora $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, Marx obtém o resultado esperado,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$$

O filósofo alemão nota mais um fato: "o fator $x_1 - x$ era, assim, *necessariamente uma diferença finita* quando ambos os lados da equação foram divididos por ele" (idem, p. 4). E na página seguinte: "Deste modo obtemos $\frac{0}{0} = a$. Desde que, na expressão $\frac{0}{0}$, todo o traço de sua origem e significado desapareceram, nós a substituímos por $\frac{dy}{dx}$, onde as diferenças finitas $x_1 - x$ or Δx e $y_1 -$

Quanto a Marx, a respeito de seu manuscrito "Mathematical treatment of the rate of surplus value and the rate of profit ", Smolinski nos diz que: "Para um homem engajado em reformular os fundamentos teóricos do cálculo, ele mostra uma surpreendente falta de habilidade para manipular mesmo as mais simples equações de primeiro grau às quais à álgebra in A-77 está limitada" (Smolinski, 1973, p. 1195). A-77 é o código do manuscrito "Mathematical treatment of the rate of surplus value and the rate of profit", mais precisamente (IISH , A-77). Não nos parece razoável ver em Marx um matemático de grande porte!

y ou Δy aparecem simbolizados como diferenças *canceladas* ou *anuladas*, ou seja, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ muda para $\frac{dy}{dx}$. Assim, $\frac{dy}{dx} = a$".

Os demais exemplos analisados por Marx serão:

i. $y(x) = x$;
ii. $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx - e$, para a, b, c, e constantes;
iii. $y(x) = ax^n$;
iv. $y(x) = a^x$;
v. $y(x) = \sqrt[2]{a^2 + x^2}$ (em uma nota suplementar);

Vejamos os exemplos terceiro e quarto. Para $y(x) = ax^n$, Marx escreve (idem, pp. 9-10):

$$y_1 - y = a(x_1^n - x^n) = a(x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

Evidentemente, ele dividiu $(x_1^n - x^n)$ por $x_1 - x$ para escrever:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

Fazendo $x_1 = x$, obtém-se $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$. Tenhamos sempre em mente que Marx visa fatorar a expressão da direita de modo que seja possível *retirar* um termo do tipo: $x_1 - x$. É importante enfatizar isso, pois, será a partir daí que sugeriremos como formalizar o conceito de derivada em Marx adiante.

Para o cálculo da derivada de $f(x) = a^x$, vejamos o que Marx faz (idem, pp. 10-12):

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1 - x} - 1)$$

Em seguida, escreverá a *suposta* expansão binomial de:

$$a^{x_1 - x} = (1 + (a - 1))^{x_1 - x}$$

Marx não demonstra a validade da expansão para a fórmula acima, a qual envolve expoentes reais. Claro que - em 1881 - o cálculo não estava fundamentado sobre rochas sólidas, todavia, o seu uso da expressão acima parecia não ter a ver com o cálculo diferencial, mas com o binômio de Newton (via analogia). Marx obtém o resultado correto para a derivada, no caso, $f'(x) = a^x lna$. Visando fixar o uso dos termos, referiremo-nos ao desenvolvimento de $(x+y)^r$ (via série de Taylor) por *série ou expansão binomial* para o caso de um expoente real arbitrário r. Chamaremos de binômio de Newton a expansão binomial de $(x+y)^n$ para $n \epsilon \mathbb{N}$.

Seguindo com o que Marx faz, ele escreverá:

$$(1+(a-1))^{x_1-x} = 1+(x_1-x)(a-1)+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1.2}(a-1)^2+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1.2.3}(a-1)^3+\cdots$$

Assim,

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1-x}-1) = a^x((x_1-x)(a-1)+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1.2}(a-1)^2 + \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1.2.3}(a-1)^3+\cdots)$$

Portanto[7],

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x((a-1)+\frac{(x_1-x-1)}{1.2}(a-1)^2 + \frac{(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1.2.3}(a-1)^3+\cdots)$$

Finalmente para $x = x_1$,

[7]Marx escreverá: *etc* no lugar de "...", ou seja:
$1+(x_1-x)(a-1)+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1.2}(a-1)^2+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1.2.3}(a-1)^3+etc.$ O uso de três pontos é menos enganador e sugere a questão: Ela converge para algo?

$$\frac{dy}{dx} = a^x((a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \cdots)$$

ou seja[8],

$$\frac{dy}{dx} = a^x lna.$$

Primeiramente, lembremo-nos de que $\varphi(x) = (1+x)^a$, para $a \epsilon \mathbb{R}$ e $|x| < 1$ é uma série convergente (chamada de *série* ou *expansão binomial*, como dissemos acima) que pode ser escrita por (ÁVILA, 1996, p. 83):

$$1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + a(a-1)(a-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$$

Para $a \epsilon \mathbb{N}$, a série nos dará o binômio de Newton. Todavia, não conhecemos uma demonstração da validade do binômio para expoentes reais e Marx não chega perto de expor algo que possamos chamar de uma demonstração.

É evidente que há problemas ligados ao que Marx fez e devemos ser enfáticos a seu respeito e sumarizá-los aqui:

i. Qual a garantia da convergência da série?
ii. A função $\varphi(x) = (1+x)^a, a \epsilon \mathbb{R}$, é tratável pelas ferramentas do cálculo e desconhecemos como fazer isso de outro modo. Marx não era um matemático profissional e a sua obtenção da derivada de $y(x) = a^x$ se dá por uma mera analogia com a fórmula do binômio. É sabido que a sua expansão só convergirá para $|x| < 1$;

---

[8]Utilizando a expansão em série de Taylor para lna.

iii. Euler, por exemplo, foi um gênio intuitivo da matemática e os seus cálculos estão recheados de imprecisões e erros. Por isso e por outros motivos, não podemos crucificar Marx pelo uso de analogias, argumentos informais e imprecisões, visto a história da matemática estar recheada deles! E aquilo que chamamos de *rigor* varia de uma época para outra. E tudo isso sem levarmos em conta que o cálculo diferencial ainda não estava bem fundamentado.

Sobre o conceito de diferencial[9]

Aqui Marx discutirá as regras do produto e da cadeia e continuará *espantado* com $\frac{dy}{dx}$ e o seu *fantasma* $\frac{0}{0}$. A maior parte do texto está centrada em uma discussão a respeito da diferencial dy e da regra do produto (sendo a regra da cadeia analisada na parte final do texto). A questão de Marx ter, por um lado, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ e, por outro, $0 = f'(x)0$ também aparece em várias partes do texto. Parece-nos que o economista alemão está engatinhando ainda na direção que o levaria a ver dy e dx como símbolos autônomos. Contudo, a sua discussão não acrescenta algo que seja relevante para o nosso texto, cujo objetivo é o de entender mais o conceito de derivada proposto por Marx.

As suas análises da regra do produto e, no fim do texto, da regra da cadeia, não trazem novidades para a nossa discussão. Porém, é interessante notar que ele aborda o tema de um ponto de vista mais *amadurecido*, e.g., ao utilizar a expressão: $d(uz) = udz + zdu$ chegando a estar “certo em tratar a diferencial $y = f'(x)dx$ como uma equação simbólica operacional” (idem, p. 26).

[9]A edição inglesa dos manuscritos contém três rascunhos (*drafts*) onde são retomadas as análises da diferencial, regra da cadeia, do produto e um quarto texto (suplemento) onde é analisada a derivada de $y(x) = \frac{u}{v}$. O próximo manuscrito é sobre a história do cálculo. Os demais textos se deterão nos teoremas de Taylor, MacLaurin, teoria das funções derivadas de Lagrange, apêndices onde são comparados os métodos de D’Alembert e o algébrico, uma discussão sobre a ambiguidade dos termos “limite” e “valor limite” e mais um texto em que o método de D’Alembert é reavaliado, porém, através de um exemplo.

Talvez, aqui, possamos dizer que ele esteja começando a dar os primeiros passos de pé!

Marx é explícito quanto à sua preferência por uma abordagem algébrica do cálculo em várias passagens de seus manuscritos, e.g., "A diferencial de y é, contudo, a conclusão de um desenvolvimento algébrico; transforma-se no ponto de partida para o cálculo diferencial (...)" (Idem, p. 27). Ele percebe o fato óbvio de que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ para funções constantes, lineares e afins (idem, p. 28-29). Antes de encerrarmos esta seção, é importante fazer algumas observações.

Observações:

i. Alguns textos básicos de cálculo diferencial e integral usam os termos função *derivável* e *diferenciável* como sinônimos, todavia, são definições distintas, mas matematicamente equivalentes. Assim, não há o menor problema em usar tal identificação – ver (Almay, 1977, pp. 145-146);
ii. Tecnicamente falando, "a diferencial (de primeira ordem) de uma função $y = f(x)$ é a parte principal do seu incremento, ou seja, aquela cuja parte é linear com relação ao incremento $\Delta x = dx$ da variável independente x. A diferencial de uma função é igual ao produto da sua derivada pela diferencial da variável independente, $dy = y'dx$" (Demidovich, p. 71, 1968);
iii. É natural que Marx se sinta confuso e pouco à vontade com $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, visto o cálculo estar começando a ser colocado em bases sólidas por Cauchy. E sabemos que o seu trabalho ainda não estava presente em livros de alcance popular e era, muito possivelmente, desconhecido por Marx. É completamente perdoável o fato de Marx desconhecer o trabalho de Cauchy.

Dialética

Veremos, então, uma interpretação dialética do processo de derivação que encontramos nos manuscritos de Marx proposta por Bunchaft. No final, exporemos um modo mais razoável de sistematizar o que encontramos nos manuscritos. É importante ressaltar que não estamos interessados em entrar na controvérsia proposta por Bunchaft que consiste em discutir se Marx tinha em mente um processo de derivação via limites ou por alguma outra via. O que temos em mente é analisar o sentido de uma interpretação dialética do processo de derivação e propor uma resposta razoável para o que Marx estudou e expôs em seu trabalho[10].

Bunchaft (2013) nos diz o seguinte:

> É a partir de 1882, enquanto leva a termo o livro I de *O Capital*, que Marx começa a re[11](estudar) o cálculo diferencial, no qual identificará a álgebra dos processos reais de que vinha necessitando, em sua obra, para dar forma matemática aos fenômenos dinâmicos da econômica (BUNCHAFT, 2013 p. 184).

O que seria "a álgebra dos processos reais"? A rigor, ele não se refere à definição de álgebra, i.e., para o espaço vetorial A sobre o corpo Λ de elementos λ, dizemos que:

> Uma álgebra A é um espaço vetorial com uma função $A \times A \rightarrow A$ de modo que as condições (M_1) e (M_2) abaixo valham. A imagem de dois vetores $x \epsilon A, y \epsilon A$ por essa função é chamada o produto de x e y e será denotada por xy.
> A função $A \times A \rightarrow A$ deve satisfazer a:
> (M_1) $\qquad (\lambda x_1 + \mu x_2)y = \lambda(x_1 y) + \mu(x_2 y)$
> (M_2) $\qquad x(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x y_1) + \mu(x y_2)$
> (GREUB, 1967, p. 139).

Na melhor das hipóteses, parece-nos razoável dizer que Marx estava procurando uma base sólida para o seu trabalho em

---

[10]É completamente desarrazoado levar a discussão para o nível da topologia e de espaços topológicos genéricos onde o conceito de continuidade é claramente mais geral que o de limite! Ora, a topologia é uma disciplina bastante moderna comparada ao cálculo e é um anacronismo falar de espaços topológicos que não satisfazem ao 1º Axioma da Enumerabilidade (BUNCHAFT, 2013, p. 193) para manter que Marx tinha em mente o processo de derivação por continuidade!

[11]Por que "reestudar"? Onde consta que Marx já havia estudado o tema?

economia, não descobrir alguma “álgebra da natureza ou da realidade”. Em uma carta para Engels[12] de 1858, ele nos diz que:

> Ao elaborar os princípios da economia eu tenho sido tão condenavelmente segurado por erros nos cálculos que, por desespero, apliquei-me a uma válida revisão de álgebra. Eu nunca me senti em casa com a aritmética. Porém, dando uma volta pela álgebra, eu devo voltar rapidamente ao caminho das coisas.

Ora, a menos que interpretemos de um modo “bastante caridoso” Bunchaft, não existe absolutamente nada nos manuscritos matemáticos que evidenciem a sua afirmação anterior sobre a “álgebra dos processos reais” ou algo parecido! E continua:

> Para Marx a situação é mais difícil, pois se depara com uma dificuldade de imediato intransponível: a construção lógico-clássica do cálculo diferencial acadêmico à sua disposição não pode se articular diretamente, a nível conceitual, científico, à construção lógico-dialética de sua análise e de sua teoria da estrutura e dinâmica da economia capitalista (idem, ibidem).

Não é de nossa alçada discutir a estrutura da teoria econômica de Marx, aliás, sequer teríamos condições técnicas para tal empreitada, visto não ser a nossa área de pesquisa. Porém, Marx não propõe absolutamente nada que vise minar a estrutura lógico-clássica do cálculo diferencial. O que vemos é uma tentativa de entender melhor a disciplina de modo que fique *menos mística* a sua base. Ele mesmo se refere ao trabalho de Newton e Leibniz pelo termo[13] *místico*. Podemos dizer que, uma tentativa REAL de reformular o cálculo no seio de uma lógica não-clássica foi elaborada por Newton da Costa e os seus colaboradores. Para isso, indicamos o trabalho de D’Ottaviano (2006). Em Marx, tal abordagem sequer

---

[12] Ver https://www.marxists.org/archive/marx/letters/index.htm

[13] Ver a parte segunda do seu manuscrito sobre o desenvolvimento histórico do cálculo (Marx, 1983, p. 91).

faria sentido! Entretanto, podemos colocar a questão que sugere uma interpretação dialética ao processo de derivação em Marx. É mister distinguir[14] "reformulação" de "interpretação". Quem propôs uma nova base para o cálculo foi o grande matemático francês Cauchy[15]! E mais, o conceito de derivação por continuidade proposto por Bunchaft - que veremos em seguida - não leva à revisão alguma da lógica clássica.

É verdade que Marx tinha em mente uma abordagem algébrica, dada a sua insatisfação com os métodos de Newton e Leibniz. O que nos espanta é o desconhecimento completo das críticas de Berkeley (*The Analyst*) por parte de seu mentor. Tendo como referência um matemático graduado em Cambridge, Samuel Moore, é chocante o seu completo desconhecimento do trabalho relevante do bispo irlandês. Vejamos, então, a interpretação que Bunchaft dá ao processo de derivação presente nos manuscritos.

Derivação

Bunchaft começa a sua discussão do conceito e método de derivação segundo Marx enunciando um processo chamado de "derivação por continuidade". Eis a definição que retiramos[16] de seu texto (idem, p.187):

---

[14]Lembremo-nos de que, salvo uma passagem em que Marx se refere à "dificuldade em entender a operação diferencial (como na *negação da negação*, geralmente) repousa precisamente em ver como ela difere de um simples procedimento e, contudo, leva a resultados reais (Marx, 1983, p. 3)" em momento algum, Marx menciona os objetivos a que Bunchaft se refere! Marx também não diz que está tentando reformular o cálculo!

[15]Não podemos dar a *César* o que não pertence a ele! Marx também não diz que está tentando reformular o cálculo! Indicamos as terceira e quarta lições de Cauchy sobre o cálculo diferencial com uma introdução história de Hawking (2005).

[16] Na página 193, retira o seguinte de Fowler:

"Definição: - A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ se existe um número $f'(a)$ tal que o erro η_a definido por $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta_a(h)h$, $\eta_a(0) = 0$, é contínua no 0 ". Não há novidade alguma na definição de Fowler. Adaptando a definição de Piskounov (1973, p. 114) para o nosso caso, escrevemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável se $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \epsilon(h)h$, onde ϵ é uma função de h de modo que $\epsilon(h) \to 0, se\ h \to 0$. Para evitar circularidade, o ideal seria

> Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \colon x\ \alpha\ y$. Então f é dita C^1 diferenciável num ponto x_0 se e só se existe um número $\alpha_{x_0} \epsilon\ \mathbb{R}$ tal que a função $f'_{x_0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
>
> $$f'_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \neq x_0$$
>
> $$f'_{x_0}(x) = \alpha_{x_0}$$, é contínua em x_0"
>
> (chamemos de θ tal definição)

Visando mantermo-nos próximos aos argumentos de Bunchaft, é importante usar a sua notação. Ele escreverá[17] (idem, p. 188) para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, sendo $y_0 = f(x_0)$.

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \varphi_{x_0}(x), \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Estamos assumindo que a função varia de x_0 a um valor x arbitrário no domínio da função. Claro que, para $x = x_0$, teremos $0 = 0$. Bunchaft escreve o seguinte:

> Realizar esta 'diferenciação' e depois anulá-la leva literalmente ao nada. Toda a dificuldade na compreensão da operação diferencial (como em geral em qualquer negação da negação) está exatamente nisto: ver como se distingue de um simples procedimento deste tipo e conduz a resultados efetivos. (Idem, Ibidem)

---

escrever m no lugar de $f'(x)$, visando não utilizar o fato de a função ser derivável na definição de *diferenciabilidade*. *A posteriori* é que se mostra a equivalência matemática das definições.

Não há a menor necessidade de partir da continuidade, visto não estarmos lidando com espaços topológicos genéricos e a definição via limites nos parece muito mais intuitiva e didática. Além disso, são matematicamente equivalentes as definições de função *derivável* e *diferenciável*. Se Marx optou por não utilizar a teoria dos limites, isso só ofuscou e o atrapalhou em seu trabalho. Colocasse a questão de modo mais claro e genérico, como veremos na parte final da seção terceira, ele poderia ter sido original. Salvo os casos quem o primeiro axioma da enumerabilidade não é válido, não há ganho algum na proposta de Bunchaft.

[17]Não encontramos para consulta o texto a que Bunchaft se refere ao lançar mão deste processo de derivação:

FOWLER, D.H. "Advanced calculus" EM: Global analylsis and its application, vol. 1, p. 136, I.A.E.A, Viena (1974).

Assim, faz-se necessário restringir o processo a $x \neq x_0$ para escrevermos (idem, p. 189):

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x - x_0}\varphi_{x_0}(x) = f'_{x_0}(x), \qquad x \neq x_0$$

Finalmente, Bunchaft suporá que $f'_{x_0}(x)$ possa ser estendida continuamente a $x = x_0$.

Antes de seguirmos, é necessário fazer algumas observações.

i. O que é uma função contínua[18]? Ora, Bunchaft utiliza o conceito de função contínua em sua definição de derivação[19] por continuidade! O que significa $f'_{x_0}(x) = \alpha_{x_0}$ é contínua em x_0? Na formulação via limites é simples: Uma função $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in I$ se e somente se $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Para X, Y espaços topológicos, $f: X \to Y$ é dita *contínua* se para cada conjunto aberto V de Y tivermos que $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto em X (Munkres, 1975 p. 102). Esta última definição é geral o suficiente para prescindir do conceito de limites, mas não acrescenta nada à nossa discussão;

ii. Concordamos com Bunchaft em que Marx não está interessado em utilizar o conceito de limite em seu texto, entretanto, nós o utilizaremos (na parte final desta seção) visando ilustrar como é possível abordar os mesmo temas discutidos por Marx e Bunchaft, sem perda de generalidade, com mais clareza e menos confusão! Sem contar que o uso de conceitos topológicos seria um anacronismo para o contexto em que os manuscritos matemáticos foram escritos.

---

[18] É comum escrever: $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em contínua em $x_0 \in I$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$(que depende de ϵ), tal que: $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, o que pode ser colocado de modo equivalente e bastante simples na teoria dos limites como: $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

[19] Claro que toda função derivável é contínua, mas não é isso o que está sendo discutido!

Bunchaft não nos diz o que entende por continuidade de uma função real sem usar a teoria dos limites e, também, a linguagem adotada em seu texto não é de natureza estritamente topológica. É importante que fique claro que ele se dispôs a utilizar o método de derivação por continuidade, o qual parece não ter vantagens sobre a formulação via limites para o caso específico de Marx. Bunchaft se refere à derivada de uma função a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x \neq x_0$, e à sua extensão obtida por continuidade para $x = x_0$. Não vemos vantagens em separar a derivada deste modo! Seria muito mais natural partir da definição de *função diferenciável* - ver a décima sexta nota de rodapé!

iii. Estender uma função f de modo contínuo a um ponto x_0 é elaborar um processo por meio do qual a função a função seja contínua em x_0. Todavia, o que seria uma função contínua para Bunchaft?

Na página 189, ele nos diz que:

> Enquanto $x \neq x_0$, o símbolo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ corresponde ao conteúdo real. Quando se atinge o valor x_0, no lado algébrico a função se estende por continuidade e assume o valor bem determinado $f'_{x_0}(x)$, enquanto, no outro lado simbólico, $x - x_0 = 0$, se expressa em $\Delta x = 0$, portanto $\Delta y = 0$, daí que o lado simbólico passa a $\frac{0}{0}$, indeterminação.

Na página seguinte, ele afirma, referindo-se a $\frac{0}{0} = f'_{x_0}(x)$

> Esta igualdade expressa, portanto, um momento transitório, de passagem, de transformação, de movimento, precisamente uma indeterminação no ser determinada, isto é, no plano lógico, uma proposição que atribui a um conceito (indeterminação) um predicado que o contradiz (determinação), violando o princípio lógico-clássico da 'não-contradição'

Finalmente, na mesma página, ele afirma que Marx chega, assim, “a um procedimento, que, ao mesmo dá uma construção algébrica rigorosa da função derivada e do seu símbolo $\frac{dy}{dx}$, e então $f'(x)$ encontra $\frac{dy}{dx}$ em seu equivalente simbólico, e este encontra em $f'(x)$ seu equivalente real”. Antes de partimos para a sua interpretação do *movimento dialético*, é importante analisarmos o que foi dito até agora por Bunchaft nas citações das páginas 189 e 190.

Primeiramente, em sua definição, que chamamos de θ, o que se faz é utilizar duas regras para definir uma única função. Isso é extremamente comum em matemática. Por exemplo,

$$f(x) = x^2, se\ x \leq 1$$
$$f(x) = x, se\ x > 1$$

Neste caso, a função é contínua em todos os pontos, porém, não possui derivada em $x = 1$. O que temos aqui é uma única função dada por duas regras. No caso de θ, a derivada coincide com $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x \neq x_0$ e é α_{x_0} para $x = x_0$. Na citação anterior, o que vemos é uma confusão lógica enorme! Não há nada de “momento transitório de passagem”, há apenas duas regras para o cálculo da derivada. Supondo fazer sentido o conceito de função contínua a que Bunchaft se refere, não há nada de “indeterminação no ser determinada”, o que é apenas um paralogismo, ou se preferirem, uma confusão linguística. O fato de $\frac{0}{0}$ se referir à indeterminação não nos permite esse tipo de associação e confusão metafísica. Primeiramente, porque temos duas regras para o cálculo da derivada, assim, restrito a $x \neq x_0$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e ponto final! Para o caso de y se referir à posição de uma partícula e x ao tempo, estaríamos dizendo que a derivada para $x \neq x_0$ coincide com a velocidade média. Para o outro caso, com a velocidade instantânea. Não ocorre qualquer violação do princípio da não-contradição em parte alguma do processo de derivação. E não importa se estamos falando no cálculo da derivada via limites ou por algum outro método. Para um exemplo trivial,

$$y = ax + b, a, b \epsilon \mathbb{R}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

Neste caso, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ para todos os pontos.
Para $y = ax^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x^2 - {x_0}^2)}{x - x_0} = a(x + x_0)$$

Fazendo $x_0 = x$, $f'(x) = ax$. Para os demais casos, de acordo com Bunchaft, teríamos: $f'(x) = a(x + x_0)$.

Também não faz sentido dizer que temos “uma proposição que atribui a um conceito (indeterminação) um predicado que o contradiz (determinação)”, visto a função ser dada por duas regras, as quais são válidas em seus determinados domínios distintos! Ora, x não é igual e diferente de x_0 ao mesmo tempo! Isso é um contrassenso, vai contra a definição da função! E quanto ao *suposto rigor* de Marx, ele peca ao derivar a função $y = a^x$. E quanto à *sua definição de derivada*, ele não a enuncia e lida apenas com exemplos e não faz sentido dizer que deu alguma definição de derivada (ou “uma construção algébrica rigorosa”) em seus manuscritos!

Movimento dialético

Vejamos, agora, como Bunchaft (idem, p. 191) ilustra o tal m*ovimento dialético* da derivação.

1. Nega-se o domínio de definição da função derivada. $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$;

2. Nega-se o domínio da relação acima, i.e., aceita-se que x possa ser x_0 visando obter $y - y_0 = (x - x_0)f'(x)$ por continuidade e, também, $0 = 0f'_{x_0}(x)$;
3. A indeterminação implícita acima fica aparente em: $\frac{0}{0} = f'_{x_0}(x)$ é superada por um processo algébrico que nos leva à expressão:
4. $\frac{dy}{dx}|_{x_0} = f'_{x_0}(x)$.

Através dessa análise Bunchaft diz que "Marx extraiu do processo de diferenciação real sua forma dialética de processo de negação da negação" (idem, ibidem).

Bem, primeiramente, não se nega o domínio da função, apenas o define! Ora, mais uma vez: a função é dada por duas regras, logo, sequer faz sentido falar em "negar o seu domínio! No caso da definição θ, a derivada é dada por duas regras e ponto final! Tome $y(x) = x^x$, cujo domínio contém aquele de lnx. Porém, a sua derivada é $y'(x) = x^x(1 + lnx)$, cujo domínio[20] é o mesmo de lnx, i.e., $\{x \epsilon \mathbb{R} / x > 0\}$!

Ou seja, o domínio da função surgiu após o processo, o que deixa claro que não faz sentido negar a proposição referente aos elementos pertencentes ao seu domínio, visto ela (a proposição e o seu domínio idem) sequer existir(em) antes do processo!

A teoria dos limites foi elaborada para diminuir as névoas existentes ao redor da fundamentação do cálculo, porém, Bunchaft parece não estar satisfeito com isso e quer encontrar uma interpretação metafísica desarrazoada para o processo de derivação! Claro que é possível estudar o cálculo diferencial com (ou sem) infinitésimos, o que é feito em vários livros, como o de Almay (1977, pp. 113-141) e Piskounov (1973, pp. 38-41). Há vários outros recursos que poderiam ser invocados, como os símbolos de Landau, todavia, estaríamos fugindo do ponto que está em discussão!

---

[20]A própria função $y(x) = lnx$ possui como derivada a função $y'(x) = \frac{1}{x}$, cujo domínio contém o da função $y(x)$. Já o domínio da função $y(x) = \sqrt[2]{x}$ contém o domínio de sua derivada $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt[2]{x}}$.

Ao escrever $0 = 0f'_{x_0}(x)$ e dizer que temos uma indeterminação implícita, todavia, explicita, em $\frac{0}{0} = f'_{x_0}(x)$, Bunchaft apenas faz um jogo vazio de palavras, visto o processo de diferenciação, em princípio, tratar $\frac{dy}{dx}$ como um SÍMBOLO ÚNICO que se refere à derivada de y por x.

É sabido que, desenvolvida a teoria referente às diferenciais, dy e dx adquirem uma determinada autonomia simbólica. Porém, em princípio, $\frac{dy}{dx}$ é um símbolo único e dy e dx são inseparáveis! Marx mesmo escreve $\frac{0}{0}$ referindo-se a uma ENTIDADE INSEPARÁVEL no processo final de derivação, não a um quociente quimérico ou a uma entidade mística! Marx denominava de "místico" o cálculo de Leibniz e Newton e queria lançar luzes no processo de diferenciação, não trazer mais névoas, como o faz Bunchaft! Além de tudo o que dissemos com relação à dita "dupla negação", ela é válida na lógica clássica, o que não se dá em várias outras lógicas como a intuicionista! Assim, não há nada que evidencie uma crítica aos fundamentos da lógica subjacente à matemática usada por Marx! Parece-nos que Russell tinha razão quanto a Hegel: "quanto pior a sua lógica, mais interessantes são as consequências a que ela dá origem" (Russell, 2002, p. 715). E isto se aplica *ipsis litteris* e *mutatis mutandis* ao que foi dito aqui nesta seção sobre a dialética proposta por Bunchaft! Vejamos um modo menos desarrazoado de sistematizar o que foi discutido acima, porém, dentro da abordagem de derivadas via limites[21].

Marx e a derivação (nossa proposta)

A respeito de Bunchaft, pensamos o mesmo que Russell pensa de Marx:

[21]Apesar de Marx não estar interessado em uma abordagem via limites, cremos ser a mais didática para analisar o tema.

> Talvez o vestido filosófico que Marx deu ao seu socialismo tivesse realmente muito pouco a ver com a base de suas opiniões. É fácil reafirmar a maior parte do que ele tinha a dizer sem qualquer referência à dialética" (RUSSELL, 2002, p. 841).

Parece-nos simples sistematizar aquilo que encontramos em Marx. Por meio de seus exemplos, fica claro o seguinte: tome $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e defina $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$G(x, y) = f(x) - f(y)$$

Agora procuremos por uma função $H(x, y)$ de modo que:

$$G(x, y) = (x - y)\, H(x, y)$$

Queremos: $H(x, x) = f'(x)$

Mesmo para o cálculo da derivada de a^x, o nosso ilustre economista do século XIX busca um método para *retirar* o termo $(x - y)$ de $f(x) - f(y)$ de modo a obter $\frac{G(x,y)}{(x-y)}$, cujo papel é exatamente o de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Mais óbvio seria dizer que (na linguagem dos limites):

$$lim_{y \to x} \frac{G(x, y)}{(x - y)} = H(x, x) = f'(x)$$

E não é necessário falar em um movimento dialético e lei da dupla negação! O que é importante colocar é o seguinte: quando é possível obter $H(x, y)$ para:

$$G(x, y) = (x - y)\, H(x, y)?$$

Aqui tudo começa a ficar mais interessante do ponto de vista matemático e é possível obter algumas das limitações do método "marxiano" de derivação. Colocado de uma maneira técnica, podemos querer saber quais funções admitem uma expansão polinomial em que ocorra o termo $(x - y)$. Taylor nos deu o ferramental matemático básico para tal análise, a qual, inclusive, estava disponível a Marx e foi por ele estudado em um dos seus manuscritos (Marx, 1973, pp. 110-113).

Apesar de haver diferenças entre as funções analíticas reais e as complexas[22], apenas as reais serão de nosso interesse aqui. Uma função $f\ U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita analítica se se expressa como uma série de potências em torno de cada ponto x_0 de U e se tal expansão converge para $f(x_0)$ em um raio de convergência $R_{x_0} > 0$.

É importante notar que, para o nosso caso de funções reais, a série de Taylor só faz sentido se for possível computar as derivadas, i.e., elas devem existir! No caso da expressão que Marx usa para o cálculo da derivada de $y(x) = a^x$ via binômio de Newton para algo do tipo $(1 + a)^x$ para quaisquer a e x reais, desconhecemos uma prova da sua validade. E não sabemos de um método para se estudar $\varphi(x) = (1 + a)^x$ sem as ferramentas da análise matemática.

Para uma função analítica, podemos escrever para o caso de funções reais[23], (Almay, 1977, p. 179-180):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots f^n(x)\frac{h^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

De modo que $lim \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = 0$ (Lima, 2004, p. 289);

Tome $h = y - x$,

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + f''(x)\frac{(y-x)^2}{2!} + \cdots f^n(x)\frac{(y-x)^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

[22]A função $y(x) = senx$ é limitada na reta, porém, $y(z) = senz$ não é limitada no caso complexo, i.e., $y: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Todavia, a ideia básica é: a função é analítica se puder ser escrita como uma série de potências na vizinhança de cada ponto!

[23]Para o caso geral em espaços de Banach, ver (DIEUDONNÉ, 1965, p. 193).

Assim,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x) + f''(x)\frac{(x-y)}{2!} + \cdots f^{n}(x)\frac{(x-y)^{n-1}}{n!} + \frac{R_{n+1}(x)}{y-x}$$

Como

$$\frac{G(x,y)}{(x-y)} = H(x,y)$$

Segue:

$$H(x,y) = f'(x) + f''(x)(y-x) + \cdots + \frac{R(x)}{y-x}\text{, i.e., } H(x,x) = f'(x)$$

desde que:

$$lim_{x\to y}\frac{R_{n+1}(x)}{y-x} = 0$$

Porém, para que a função possa ser representada por uma série de potências convergente, devemos ter que[24] $lim_{x\to y}\frac{R_{n+1}(x)}{(y-x)^{n+1}} = 0$, assim:

$$lim_{x\to y}\frac{R_{n+1}(x)}{y-x} = lim_{x\to y}\frac{R_{n+1}(x)}{(y-x)^{n+1}}(y-x)^{n} = 0.0 = 0$$

Segue que $f'(x) = H(x,x)$.

Ou seja, a classe das funções analíticas nos dá o que queríamos e não há a menor necessidade de se falar em algum tipo de dialética ou materialismo dialético, espaços topológicos que não satisfazem ao 1º Axioma da Enumerabilidade, lei da dupla negação ou de uma determinação da realidade pela lógica. Hegel, e.g., acreditava que a

[24] Ver, por exemplo, (Lima, 2004, p. 289).

lógica passaria a ser metafísica à medida em que fosse *determinante do mundo*. Muito menos é necessário utilizar um processo matemático diferente daquele da teoria dos limites! E disso ainda decorre uma das limitações da proposta de Marx: existem funções do tipo $C^{\infty}(I)$ cuja série de Taylor não converge para a função no ponto!

Portanto, não será possível representar todo tipo de função por uma série de Taylor. Isso não impede o cômputo das derivadas, caso existam. Apenas não poderemos assumir que uma função arbitrária tenha uma representação via série de Taylor para todos os pontos de seu domínio para, então, partir da série em direção às derivadas.

Um exemplo explícito e bastante conhecido de uma função real não-analítica é $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, se $x > 0$; $f(x) = 0,\ x \leq 0$. f possui derivadas contínuas de todas as ordens em todos os pontos da reta real, mas não é analítica na origem, ou seja, a série infinita não convergirá para $f(x)$ para $x > 0$. Isso ilustra uma limitação óbvia do que foi dito acima a respeito do cálculo de derivadas – ver (AMANN, 2005, p. 378).

Conclusão

Comecemos com a questão: existe um conceito de derivada que podemos chamar de "derivação marxista"? Não vemos em Marx um matemático original e criador de conceitos, contudo, vemos com bons olhos a sua valorização dos métodos algébricos estudados por Lagrange e o seu interesse pelo cálculo. Parece-nos bastante razoável a sua abordagem via exemplos, a qual nos levou à sistematização acima, ou seja, àquela em que queremos que $G(x, y)$ seja do tipo: $G(x, y) = (x - y)\, H(x, y)$, para $f'(x) = H(x, x)$. Não diríamos que houve algum tipo de originalidade (do ponto de vista estrito da matemática) na análise de Marx. Por que?

Aparentemente, apesar da questão ter sido colocada de modo prático através dos exemplos, e.g., $y(x) = ax^n$ e $y(x) = a^x$, quando Marx visa encontrar um fator do tipo $(x - y)$ para facilitar a obtenção de $f'(x)$, ele não adota a postura de um matemático que busca por condições gerais às quais uma função deva satisfazer. Ele se comporta como um sujeito que opera apenas a partir de exemplos, um *cidadão prático*! O espírito do matemático é outro, ele sempre busca o que é geral e abstrato. A sua análise *crua* elaborada através de exemplos assaz simples (salvo $y(x) = a^x$) não é original. Teria sido, caso tentasse caracterizar todas as funções para as quais o método utilizado fosse válido! Vimos que, para as funções analíticas, ele é!

Quanto à interpretação dialética do processo de derivação, apenas na primeira página do seu texto "Sobre o conceito de função derivada" é que encontramos uma referência explícita a "negação da negação", no caso: "Toda dificuldade em entender a operação diferencial (como na *negação da negação*, geralmente) repousa precisamente em ver como ela difere de um simples procedimento e, contudo, leva a resultados reais (Marx, 1983, p. 3)".

Conforme vimos acima, a aplicação de algo dessa natureza dialética só ofusca a compreensão do processo de derivação e apenas traz confusões à compreensão do conceito de derivada. Consideramos quase que um tipo de "panfletagem política" querer achar em Marx o que não se encontra lá.

Apêndice: o materialismo dialético em Marx

O materialismo dialético pode ser entendido como uma concepção filosófica do mundo criada por Karl Marx, cujo método fora inspirado em Friedrich Hegel. A inovação em relação ao método dialético hegeliano reside na ideia segundo a qual a unidade do mundo está fundamentada na *matéria* (e não no "espírito", como Hegel); daí a acepção materialista da dialética. No entanto, como aponta Bertrand Russell, Marx "*se dizia um materialista, mas não do tipo do século XVIII. Seu tipo de materialista, sob cuja influência hegeliana ele chamou de 'dialética', diferenciava-se de modo* *importante do materialismo tradicional e era mais próximo do que é chamado instrumentalismo*"[25]. Este materialismo marxista, portanto, difere essencialmente de formas anteriores de materialismo na medida em que consiste, sobretudo, no fato de que ele explica materialmente não apenas a natureza, mas também a sociedade e sua história.

Com base nesta visão, o materialismo dialético torna-se o fundamento filosófico do marxismo, usado para derivar leis de desenvolvimento da natureza e da sociedade, já que concebe as sensações e percepções como *interações* entre sujeito e objeto. Neste sentido o objeto se transforma no processo de conhecimento, ao mesmo tempo que o sujeito só conseguirá compreender o que é referido objeto se compreender tal processo de transformação. No âmbito dos fenômenos sociais, isto significa afirmar que se deve compreender de que modo as forças sociais, em constante colisão e composição, moldam o mundo em que se manifestam como fenômeno histórico.

Na base do pensamento dessa concepção materialista reside, ainda, a concepção hegeliana da dialética, pensamento do qual Marx extraiu os elementos primazes para formalizar filosoficamente os mecanismos constitutivos desses processos históricos imanentes aos objetos, por meio de tal método tornar-se-ia, portanto, evidenciar e superar as contradições constitutivas dos processos de criação e destruição dos objetos, inserindo *lógicas próprias* e *sentidos relacionais* que os afixam à totalidade. A ponto de quaisquer fenômenos naturais poderem, sob tal prisma, ser compreendidos a partir desta sua composição imersa neste perpétuo movimento de superação dos contrários, cujo fim reside na totalidade (o Absoluto). Hegel assume, portanto, que a razão humana ("Bewusstsein") continua a evoluir no progresso dialético: cada conceito ("These")

---

[25]He called himself a materialist, but not of the eighteenth-century sort. His sort, which, under Hegelian influence, he called 'dialectical', differed in an important way from traditional materialism, and was more akin to what is now called instrumentalism. RUSSELL, B. *History of Western Philosophy*. Routledge Classics, p. 836, London (2004).

implica sua contradição ("Gegenthese"), e ambos se fundem em um nível mais elevado de conhecimento ("Synthese"), que representaria um novo estágio de progresso do Universo. Todavia, tal nova formulação estaria condenada a destruir, e do mesmo modo, a dar lugar a mais um passo na marcha do progresso. Isto é, como uma nova tese, por sua vez, ela invoca sua gênese, ao mesmo tempo em que é ameaçada por sua antítese. Segundo Hegel, esse processo progressivo de conhecimento determina o pensamento e, portanto, a realidade que ele tenta explicar da natureza da mente ("Idealismus"). Hegel, assim, assume que a realidade pode ser deduzida da mera constatação de que ela não pode ser auto-contraditória[26].

Marx, analogamente idealiza que a força motriz do desenvolvimento é a contradição entre polos opostos que representam a unidade e a luta de contrários ("Einheit und Kampf der Gegensätze"), intrinsecamente inerentes aos processos naturais e sociais. Marx, então, transforma a dialética hegeliana e postula que o mundo, *i.e.,* a realidade objetiva, pode ser explicado por sua existência material e seu desenvolvimento; não pela realização de uma ideia absoluta divina ou humana – como era a do idealismo hegeliano.

Em Marx, o absoluto material-econômico do processo de produção (em especial, observado a partir do recorte trabalho *vs.* Capital) toma lugar do absoluto divino dantes postulado pela doutrina hegeliana, assumindo, assim, a diante do processo de construção da história[27]. A realidade objetiva existe fora e independente da consciência humana, que busca, incessantemente,

---

[26] RUSSELL, B. *History of Western Philosophy*. Routledge Classics, p. 782, London (2004). É evidente que as contradições podem surgir com o 'fluxo temporal', porém, nunca são estáticas e pontuais. Caso contrário, não faria sentido falar em dialética aos moldes de Hegel.

[27] Para Russell, "Talvez o vestido filosófico que Marx deu ao seu socialismo tivesse realmente muito pouco a ver com a base de suas opiniões. É fácil reafirmar a maior parte do que tinha a dizer sem qualquer referência à dialética" (RUSSELL, *Idem*, p. 841). Observação: como o texto foi escrito *a quatro mãos*, foram utilizadas duas edições distintas do livro de Russell. Daí optarmos por citar uma delas aqui nas notas.

captá-la, ao mesmo tempo é que formada por ela. Isto é, as forças da natureza forjam o homem, que, por sua vez, as observa como os fenômenos que guiam seu processo constitutivo. É o Marx que, em “Contribuição à crítica da Economia política”, 1859, aperfeiçoa esse modelo de pensamento do homem e da consciência, afixando-os, definitivamente, como parte da natureza de ordem material que o precede, isto é, "*não é a consciência do homem que determina sua existência, mas o seu ser social que determina a sua consciência*".[28] Este *teorema* é um fundamento do pensamento de Marx que se opõe a Hegel:

> Como Hegel, ele pensa que o mundo se desenvolve de acordo com a fórmula dialética, mas ele discorda totalmente de Hegel quanto à força motriz do desenvolvimento. Hegel acredita em uma entidade mística chamada "Espírito", que faz com que a história humana se desenvolva de acordo com os estágios da dialetica conforme estabelecido na lógica de Hegel. (...) O dialetic de Marx não tem essa qualidade, exceto uma certa inevitabilidade. Para Marx, é a matéria, não espírito, a força motriz.[29]

Sob tal prisma, todos os fenômenos mentais e sociais baseiam-se na realidade objetiva, na matéria (“Materialismus”). As ideias e a consciência são apenas reflexos da realidade material. Pelo material, ele entende a totalidade de todas as coisas e processos objetivos e reais, incluindo as relações, conexões e relacionamentos na natureza e na sociedade. A característica essencial deste conceito de matéria é para Marx o movimento no sentido da mudança dialética progressiva, causada por contradições internas e tensões.

---

[28] “Es ist nicht das Bewußtsein der Menschen, das ihr Sein, sondern umgekehrt ihr gesellschaftliches Sein, das ihr Bewußtsein bestimmt”. MARX, K. *Kritik der politischen Ökonomie*.Vorwort. Zit. n. MEW 13, S. 10, mlwerke.de/me/me13/me13_007.htm.

[29] “Like Hegel, he thinks that the world develops according to the dialectical formula, but he totally disagrees with Hegel as to the motive force of the development. Hegel believed in a mystical entity called ‘Spirit’, which causes human history to develop according to the stages of the dialetic as set forth in Hegel’s logic. (...) Marx’s dialectics has none of this quality except a certain inevitableness. For Marx, matter, not spirit, is the driving force” (RUSSELL, 2004, p. 837).

Uma vez que o homem através do seu trabalho está em troca constante com a natureza e, assim, entra nas relações sociais ("materielle"), essa lei do movimento material de acordo com a teoria marxista aplica-se também ao desenvolvimento do sistema social ("historischer Materialismus").

Agradecimentos

Os autores agradecem ao professor Ricardo Scucuglia pelas discussões referentes à filosofia e educação e ao professor César Rogério de Oliveira pelas discussões sempre relevantes em tudo que se refira à matemática. Finalmente, aos professores Osvaldo Pessoa Jr. e Olival Freire Jr. por nos apresentarem os manuscritos de Marx.

Referências

ALMAY, P. Elementos de cálculo diferencial e integral, vol. II, 1ª Edição. São Paulo: Ed. Kronos, 1977.

AMANN, H.; ESCHER, J. Analysis I. Berlin: Ed. Birkhäuser Verlag, 2005.

ÁVILA, G. Cálculo 2 - Funções de Uma variável 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1996.

BERKELEY, G. The Analyst. London, 1734. Disponível em: <www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf>. Acesso em: 27 de novembro de 2017.

BUNCHAFT, F. O conceito e o método de derivação nos manuscritos matemáticos de Marx: uma controvérsia. In: FREIRE, O. (org.). Ciência, Filosofia e Poítica: uma homenagem a Fernando Bunchaft. Salvador, BA: Editora da Universidade Federal da Bahia, 2013.

CAUCHY, A-L. Lessons 3-4 on differential calculus. In: Hawking, S. W (Ed.). God created the integers – the mathematical breakthroughs that changed history. London: Penguin Books, 2005.

DEMIDOVICH, B. Problems in mathematical analysis. Moscow: Ed. Mir., 1968.

DIEUDONNÉ, J. Fondements de l'analyse modern. Paris: Ed. Gauthiers-Villars, 1965.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; DE CARVALHO, F. T. Sobre Newton, Leibniz, infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal ao cálculo diferencial paraconsistente. Educação Matemática Pesquisa. v. 8, n. 1, 2006.

GREUB, W. H. Linear algebra, 3rd. Ed. New York: Springer-Verlag: 1967.

LIMA, E. L. Curso de análise vol. 1. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 2004.

MARX, K. Mathematical Manuscripts. London: New Park Publications LTd, 1983. Disponível em: <https://www.marxists.org/archive/marx/letters/index.htm>. Acessado em 27 de novembro de 2017.

MATHEUS, P. H. The dialectics of differentiation: Marx's mathematical manuscripts and their relation to his economics. Middlebury, Vermont: Middlebury College Economics Discussion Paper No. 02-03, 2002. Disponível em: <http://sandcat.middlebury.edu/econ/repec/mdl/ancoec/0203.pdf>. Acessado em 27 de novembro de 2017.

MUNKRES, J. R. Topology: a first course. USA: Prentic-Hall Inc., 1975.

PISKOUNOV, N. Cálculo diferencial e integral I. Moscow: Ed. Mir, 1973.

RUSSELL, B. A history of western philosophy. London: Routledge, 2002.

SMOLINSKI, L. Karl Marx and mathematical economics. Journal of Political Economy, v. 81, n.5, 1973.

Capítulo quatro

Por uma didática da invenção na/da formação do professor de matemática

Filipe Santos Fernandes[1]
Roger Miarka[2]

Manoel de Barros (1993)

[1] Um apaixonado pelas palavras, suas políticas e poéticas. Professor na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. E-mail: fernandes.fjf@gmail.com

[2] Amante das alturas, do mar e da diferença. Também professor no Departamento de Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, câmpus de Rio Claro. Ainda que não seja seu meio preferido de comunicação, pode ser contatado pelo e-mail romiarka@gmail.com

I

Apalpar as intimidades do mundo – provavelmente a tarefa mais importante com a qual a escola se ocupou em tantos anos de funcionamento. Ensinar processos, guiar olhares, ponderar perguntas, insinuar respostas... Dizer aos outros o que (não) é preciso saber. Talvez por isso à formação de professores tenham atribuído um papel de destaque nas discussões que envolvem a educação e a escola. Afinal, quem ensina um outro alguém a apalpar as intimidades do mundo senão o professor?

Para apalpar as intimidades do mundo é preciso saber:

a) Que o esplendor da manhã não se abre com faca

b) O modo como as violetas preparam o dia para morrer

c) Por que é que as borboletas de tarjas vermelhas têm devoção por túmulos

d) Se o homem que toca de tarde sua existência num fagote, tem salvação

e) Que um rio que flui entre 2 jacintos carrega mais ternura que um rio que flui entre 2 lagartos

f) Como pegar na voz de um peixe

g) Qual o lado da noite que umedece primeiro.

etc.

etc.

etc.

Desaprender 8 horas por dia ensina os princípios.

Neste texto, trataremos da formação de professores, mas não de *qualquer* formação, nem de *qualquer* professor, muito menos de um professor para *qualquer* escola. Ao perguntar sobre o que é *preciso* saber para se tornar professor, pretendemos fugir da armadilha da *precisão* que diria da formação, do professor ou da escola genérica e identitária. Aqui, o *preciso* tem laços com o que nos faz falta, com o que nos é necessário, com o nosso indispensável: princípios que nos são ensinados nos caminhos do *desaprender*.

Em um texto em cacos, numerados e não sequenciados -mas com alguma lógica-, operamos fragmentos da *Didática da Invenção* de Manoel de Barros (1993), para propor uma *nossa* didática da invenção do professor de matemática junto a questões que envolvem a escola como espaço público (MASSCHELEIN; SIMONS, 2014) e a importância de se considerar a formação de educadores em termos de responsabilidade sem conhecimento (BIESTA, 2013).

II

Nos dias atuais não é raro escutar palavras de descontentamento com a escola, seja de pais, de alunos, de professores ou mesmo de futuros educadores. De um modo geral, a escola é acusada de servir como um dispositivo que, dentre tantas outras negativas tarefas, aliena, restringe, coage, neutraliza e que, por isso, se mostra ineficiente e de pouca utilidade, sendo a *crise da escola* uma marca recorrente dos discursos sobre a educação.

Segundo Masschelein e Simons (2014), contudo, a escola apenas se mostra em crise por não tratar do que lhe é próprio, a dizer, ser um *refúgio*, um espaço para práticas que se distingue dos mundos social e laboral dos sujeitos da educação. Para esses autores, a escola deveria servir como um marco de separação de tempos e espaços, tornando-se um dispositivo que torna possível o encontro entre *tempo livre* e *espaço público*: por um lado, *libertando o tempo*, rompendo com a lógica do tempo produtivo; por outro, *publicizando o espaço* e indo de encontro à ideia de bem individual. Com isso, a escola seria o dispositivo que permitiria que seus alunos se implicassem livremente com algo em uma dimensão coletiva sem visar aos discursos que a afirmam como espaço de preparação para o convívio social ou para o mundo do trabalho.

Desinventar objetos. O pente, por exemplo

Dar ao pente funções de não pentear

Até que ele fique à disposição de ser uma begônia

Ou uma gravanha.

Usar algumas palavras que ainda não tenham idioma.

Assim entendida, a escola estabelece uma relação outra com o mundo, liberando seus elementos do cultivo dos espaços mundanos para que sejam praticados publicamente e coletivamente. Em outras palavras, a escola passa a atuar em uma tripla doação: de tempo livre, de espaço público e de apresentação de elementos do mundo livres de suas funções primeiras à disposição de práticas. A escola tem a potência de liberar o pente de Manoel de Barros de modo que fique à disposição para que seja livremente operado e praticado a ponto de tornar-se uma begônia ou uma gravanha. Pensar a escola é pegar gosto pelo desvio, pelo não-sabido: desaprender para apalpar o invisível e aprender as essências do que se desconhece; ignorar coisas, desinventando-as, para, finalmente, *inventá-las* de outros modos, reencontrando-as.

XI

Mas quais elementos do mundo são postos à disposição na escola? Compõem a escola as materialidades, linguagens e subjetividades com que vivemos no mundo, especialmente nos espaços laborais e familiares. São elementos anteriores à escola, no sentido de que já têm seu lugar no mundo, sendo operados cotidianamente. A escola permite a entrada dessas linguagens, subjetividades e materialidades, dispondo-as sobre o que Masschelein e Simons chamam de *mesa*, para que sirvam aos seus exercícios de práticas, como potência de um *recomeço*, de *novos inícios*...

> A escola é o tempo e o espaço em que os estudantes podem abandonar todo tipo de regras e expectativas relacionadas com o sociológico, o econômico, o familiar e o cultural. Em outras palavras, dar forma à escola (fazer a escola) tem a ver com uma espécie de suspensão do peso de todas as regras. Uma suspensão, por exemplo, das regras que ditam e explicam porque alguém – e seu grupo ou sua família – cai em certo degrau na escala social. Ou da regra que afirma que as crianças de alojamentos sociais não têm interesse por matemática [...]. A escola cria igualdade precisamente na medida em que produz tempo livre, ou seja, na medida em que consegue suspender ou adiar (temporalmente) o passado e o futuro, criando assim uma brecha no tempo linear. (MASSCHELEIN; SIMONS, 2014, p.36-37, tradução nossa).

Desse modo, as acusações que se impõem à escola não recaem sobre sua caracterização em si, mas aos modos como foi capturada e convertida em um dispositivo de caráter privado, em prol do tempo produtivo e do bem individual. Defendemos, aqui, a escola na perspectiva de Masschelein e Simons: como espaço público. Defendemos uma escola que bote aflição nas pedras, que permita à educação uma sensibilidade diferente daquela ditada pela tradição, que confira à educação novas relações, efeitos, sentidos...

Adoecer de nós a Natureza:

– Botar aflição nas pedras

(Como fez Rodin).

Auguste Rondin, *Eva*, 1881
Fonte: http://www.musee-rodin.fr/en/collections/sculptures/eve

XIX

Nesse exercício de *invenção*, duas forças se mostram: a de conservação e a de renovação do mundo. A *conservação* se dá na entrada de materialidades, linguagens e subjetividades mundanas na escola; afinal, a entrada desses elementos apenas se faz na medida em que eles já têm seu papel no mundo. A *renovação*, por sua vez, se dá pela possibilidade de profanação desses elementos. Cabe à escola estabelecer-se nessa região fronteiriça entre o antigo e o novo: uma

O rio que fazia uma volta atrás de nossa casa

era a imagem de um vidro mole que fazia uma

volta atrás de casa.

Passou um homem depois e disse: Essa volta

enseada.

Não era mais a imagem de uma cobra de vidro

que fazia uma volta atrás de casa.

Era uma enseada.

Acho que o nome empobreceu a imagem.

fronteira que possibilita que enseadas possam ser operadas como cobras de vidro, arredias aos nomes próprios que empobrecer-lhes-iam se sacralizados.

A escola como espaço público se mostra como uma baliza que atende ao que Hannah Arendt considera como pedra angular da educação, brecha intempestiva do tempo.

> A Educação é o lugar em que se decide se se amam suficientemente as nossas crianças para não as expulsar do nosso mundo deixando-as entregues a si próprias, para não lhes retirar a possibilidade de realizar qualquer coisa de novo, qualquer coisa que não tínhamos previsto, para, ao invés, antecipadamente as preparar para a tarefa de renovação de um mundo comum. (ARENDT, 2011, p. 247)

IX

Ainda que a escola possa ser tomada como acontecimento aberto que dispõe, livre e coletivamente, elementos diversos para serem praticados, os discursos que permeiam a formação de professores insistem em orientações que defendem a escola como espaço de preparação para a vida social e laboral e de preservação das materialidades, linguagens e subjetividades já dispostas no mundo.

Especialmente, a formação de professores de matemática no Brasil é marcada por uma orientação disciplinar na qual o conhecimento matemático resume-se a um conjunto de saberes historicamente construídos e consolidados pela comunidade científico-acadêmica *dos matemáticos*; saberes que, em geral, têm como direção o desenvolvimento científico e tecnológico e que dão centralidade à vida em uma sociedade urbano-industrial. Nesse sentido, Gomes (2016) destaca que em oitenta anos de criação do primeiro curso de Matemática do Brasil pouco se avançou na superação de tal marca: nesses cursos, foca-se o desenvolvimento da pesquisa em Matemática, assumindo a formação de professores um papel notoriamente menor.

Esse modo de pensar a formação de professores têm, evidentemente, laços com problemáticas mais amplas que envolvem a própria matemática. Ao se converter como metanarrativa da modernidade (CLARETO, 2003), a matemática recebe um estatuto universalizante que viabiliza a normalização de modos de pensar, de fazer e de ser. Esse processo de normalização tem como papel a prescrição de quais materialidades, linguagens e subjetividades serão operadas na aula de matemática; de qual será o papel da matemática na constituição do sujeito social e laboral capaz de atender aos anseios de *certa* sociedade.

Para entrar em estado de árvore é preciso

partir de um torpor animal de lagarto às

3 horas da tarde, no mês de agosto.

Em 2 anos a inércia e o mato vão crescer

em nossa boca.

Sofreremos alguma decomposição lírica até

o mato sair na voz.

Hoje eu desenho o cheiro das árvores.

As questões que se colocam, então, são a de como constituir espaços de formação de professores de matemática sensíveis à educação como brecha intempestiva no tempo, já que os espaços de formação são usualmente povoados pelo tempo da tradição; de como construir junto a professores de matemática uma sensibilidade que não seja apenas ligada à conservação, mas também à renovação do mundo; de quais materialidades, linguagens e subjetividades a educação matemática, hoje, dispõe, e com quais materialidades, linguagens e subjetividades não dispomos e podemos vir a dispor.

Questões que, acreditamos, devem ser encaradas não só em termos de sensibilidade, mas de responsabilidade...

VII

No descomeço era o verbo.

Só depois é que veio o delírio do verbo.

O delírio do verbo estava no começo, lá

onde a criança diz: Eu escuto a voz

dos passarinhos.

A criança não sabe que o verbo escutar não

funciona para cor, mas para som.

Então se a criança muda a função de um

verbo, ele delira.

Em poesia que é voz de poeta, que é a voz

de fazer nascimentos –

O verbo tem que pegar delírios.

Quando a escola é pensada no sentido do cultivo dos espaços mundanos, dispondo apenas materialidades, linguagens e subjetividades que respondem ao mundo social ou laboral previamente estabelecido, o papel do professor se limita, muitas vezes, ao de produzir o sujeito com modos de existência já determinados – formas de pensar, de conhecer, de agir ou de sentir que são definidas antes que o processo de escolarização se inicie. Assim, os espaços de formação preocupam-se com discussões que envolvem a produção do ser social, cidadão consciente da realidade em que vive, e do ser laboral, capacitado a participar dessa realidade.

Como a criança de Manoel de Barros que muda a função do verbo, cabe repensar a formação – e, consequentemente, sua função – quando tomamos o mundo em termos de pluralidade e diferença. Aqui, a orientação técnica e prescritiva do formar professores perde seu sentido estrito, sendo necessário tratá-la de outro modo: o verbo tem que pegar delírios. Para dotar o verbo *formar* de certos delírios, seguiremos discutindo-o em termos de *responsabilidade educacional*: uma tentativa de fazer nascimentos. Tendo como orientação principal o trabalho de Biesta (2013), optamos por percorrer três dimensões dessa responsabilidade que nos ajudam a inventar a formação de professores de matemática: a responsabilidade pela subjetividade, a responsabilidade epistemológica e a responsabilidade política.

Evidentemente, a responsabilidade educacional não se constitui apenas nessas três dimensões, que tampouco devem ser observadas de maneira desassociada. Podemos serenamente dizer que essas são as dimensões possíveis a partir de questões que nos atravessam mais intensamente, caminhos pelos quais podemos traças uma didática da invenção da formação de professores de matemática. Um didática que, como nos ensina Corraza (2015, p. 110), opere "com a condição de que cada língua esqueça a própria origem para se tornar dupla de si mesma".

V

Ao romper com a ideia do educador como provedor de capacidades que dão ao educando os aspectos emocionais e comportamentais que o definem como ser social, o educador passa a ter responsabilidade pelo que permite ao estudante tornar-se um ser único e singular. Aqui, a primeira dimensão da responsabilidade: a *responsabilidade pela subjetividade*, e não por um sujeito previamente estabelecido. Como destaca Biesta (2013, p. 51), "envolver-se em relações educacionais implica, portanto, a responsabilidade por alguma coisa (ou melhor, por alguém) que não conhecemos e que não podemos conhecer". Por isso, não se trata de uma tarefa que pressupõe o que acontecerá no futuro como resultado de nossos esforços, mas que apenas no presente assume seu sentido. Uma inversão do nosso modo de entrada na educação: professores-formigas-carregadeiras...

Formigas carregadeiras entram em casa de bunda.

Essa responsabilidade traz consigo uma visão de formação de professores que, de algum modo, supere os discursos humanistas que pretendem definir a humanidade do humano, considerando a educação como espaço que intensifique o *essencial* para o exercício dessa humanidade. De outro modo, a responsabilidade pela subjetividade promove uma atenção e cuidado pelos quais os sujeitos se tornam singulares em um mundo de tantas outras singularidades, considerando que sua presença no mundo está intimamente relacionada a tantas outras presenças. Para Biesta (2013), em consideração a Emmanuel Levinas, a escola é um espaço povoado por *novos inícios*, meio que compõe vetores dispersos do que somos, do que não somos, do que poderíamos ter sido e do que podemos vir a ser.

A formação de professores de matemática traz, então, uma responsabilidade que não pode ser conhecida de antemão. Em outras palavras, ser responsável pelas subjetividades possíveis em uma aula de matemática significa uma responsabilidade em que não se conhece aquilo pelo qual se é responsável. Isso, contudo, não significa uma falta de preparação ou compromisso: é na constituição de espaços formativos sensíveis às diferenças dos outros e nos sentidos que podemos produzir junto a essas diferenças que constituímos uma *nossa* voz, muitas vezes diferentes daquelas que ecoam no espaço escolar.

VIII

No caso da matemática, ganha força na formação de professores “um modo de pensar e fazer matemática que busca e valoriza a clareza da linguagem, a objetividade, a certeza, o recurso a demonstrações, a generalidade das proposições, a segurança e a perenidade do que se assegura como o conhecimento matemático” (SOUZA; FONSECA, 2010, p. 306). Esse modo de pensar e fazer desdobra-se em esforços que afirmam que professores de matemática devem tomar o pensamento lógico-dedutivo como modo legítimo de significar o mundo, assumindo a educação como meio de qualificação de sujeitos pela razão e pela verdade.

Inegavelmente, esse modo de afirmar o professor de matemática é excludente na medida em que modos de pensar e fazer delineados junto a outras subjetividades deixam de compor sua responsabilidade. A atitude responsiva que configuraria o cuidado de professores com formas singulares de existir, pensar ou fazer minar-se-ia diante da tarefa de conduzir o sujeito à razão e à verdade que apenas pela matemática supostamente poderiam ser construídas. Nas palavras de D'Ambrosio (2002, p. 17):

> [...] a Matemática, com seu caráter de infalibilidade, de rigor, de precisão e de ser um instrumento essencial e poderoso no mundo moderno, teve sua presença firmada excluindo outras formas de pensamento. Na verdade, ser racional é identificado com dominar a Matemática. A Matemática se apresenta como um deus mais sábio, mais milagroso e mais poderoso que as divindades tradicionais e outras tradições culturais.

Somos, assim, *inquilinos* de um espaço que não inventamos. Espaços que são arquitetados por palavras que não são as nossas, mas que reverberam intensamente na formação de professores. Palavras de ordem epistemológica que não se ligam apenas a um conhecimento puro, imprescindível e inalcançável, mas que têm profunda relações com outras ordens: a econômica, a indentitária, a representacional. Somos inquilinos de um modo de uma forma de saber, de um meandro do poder e de uma composição de sujeito: inquilinos de um modo de formar professores de matemática.

> Somos inquilinos na Educação (Matemática) de saberes disciplinares (Matemática), disciplinados e disciplinadores, destituídos da produção humana, então sistematizados por seus objetos internos e organizados através de seus modos, muitas vezes únicos, de operar. Somos inquilinos de políticas cognitivas que se atrelam à invariância e a leis universais. Somos inquilinos de modos de conceber o pensamento ligado à representação e a imagens universais e universalizantes. Somos inquilinos de um conhecimento asséptico que compreende que existe um sujeito cognoscente que irá dar conta de conhecer um objeto, melhor,

> reconhecer. Somos inquilinos também de um conhecimento que se dá via a um saber idealizado, não mundano, portanto puro. Somos inquilinos de uma cognição que atende ao reconhecimento, então, recognição. (ROTONDO; CAMMAROTA, 2017, p. 159)

Ao tramar uma didática da invenção da formação de professores de matemática pretendemos destituir a matemática da posição de divindade mais sábia, mais milagrosa e mais poderosa para operá-la como outra divindade: aquela que seja considerada apenas em sua potência criadora, como despertar de materialidades, linguagens e subjetividades do mundo que podem não ser antecipadas e que estão dispostas para um uso coletivo, artístico e inventivo. Pretendemos, ainda, sair da postura de inquilinos para sermos responsáveis pela construção de nossos próprios abrigos epistemológicos; abrigos que nos permitam a liberdade de exercitá-lo livremente, destruindo e construindo suas formas. Pretendemos, por fim, operar na formação de professores com uma matemática-girassol-em-Van-Gogh...

Um girassol se
apropriou de Deus:
foi em Van Gogh

Vincent Van Gogh, *Doze girassóis em uma jarra*, 1888
Fonte: http://vangoghs-art.blogspot.com.br/p/obra-3.html

XVIII

O imperativo da matemática pressupõe caminhos para espaços de formação nos quais o fundamental é o domínio da matemática acadêmica, mesmo sem explicitar mais precisamente seu papel ou contribuição na/para a formação desses educadores. Essa postura não é, contudo, assumida de forma ingênua: ela faz parte de um projeto maior que tem em seu núcleo a dominação e a subordinação de certas formas de pensamento e a preparação de sujeitos para a vida em uma sociedade marcada pelo desejo de progresso creditado ao desenvolvimento científico e tecnológico. Esse projeto não se consolida apenas nos espaços formativos de professores de matemática, mas efetiva-se em ações educativas escolares e universitárias que prescrevem e promovem a individualização do pensamento; a especificação e a hierarquização de saberes; a naturalização da seriação, da mecanização e da memorização nos processos de ensino-aprendizagem; e a adaptação da lógica de produção, de avaliação e de gratificação da vida capitalista ao espaço escolar.

Surge, assim, uma segunda dimensão da responsabilidade: a *responsabilidade epistemológica*. Como educadores, somos usualmente atravessados por discursos que conferem aos nossos objetos, sejam eles matemáticos ou não, a necessidade de uma aplicabilidade e funcionalidade direta no mundo social ou laboral. Somos orientados a ensinar uma *matemática para a vida*, uma *matemática prática*: matemática que seja a reprodução do mundo. Contudo, como reconhecer essa aplicabilidade ou funcionalidade quando assumimos o mundo em termos de pluralidade e diferença? Como definir nos processos formativos, de uma forma geral, o reconhecimento da presença, da utilidade e dos critérios da matemática? Como dizer de funções e aplicações sem cair no perigoso jogo da prescrição ou da generalização?

Acreditamos que assumir uma *responsabilidade epistemológica* não é admitir apenas a matemática que tenha uma funcionalidade e aplicabilidade identificáveis e previamente estabelecidas, mas considerar uma orientação formativa que *tenha na matemática a confiança de pôr algo a funcionar*. Trata-se, então, de uma responsabilidade pelo movimento, pelo deslocamento, pela subversão de epistemologias da tradição científico-acadêmica, levando os futuros educadores a compreenderem as educabilidades disparadas quando, por exemplo, outras matemáticas, diferentes daquelas ditadas por programas curriculares, são colocadas em funcionamento no espaço escolar. Evidentemente, essas matemáticas podem ser expressas em funções – como contar, classificar, medir, ordenar, inferir ou comparar – que sejam diretamente aplicáveis no mundo, mas podem também ser expressas singularmente na escola, como acontecimento aberto que não possua uma aplicação reconhecível no mundo social ou laboral. Ao processo formativo cabe, então, construir espaços nos quais essa sensibilidade a outras matemáticas possa ser apurada, de modo que futuros educadores possam implicar-se de maneira livre e coletiva. Portanto,

> [...] os educadores e os professores devem estar cientes de que aquilo que rompe a operação fluente da comunidade racional não é necessariamente um distúrbio do processo educacional, mas poderia muito bem ser o próprio ponto em que os estudantes começam a encontrar sua voz única, responsiva e responsável. Isso também mostra que a responsabilidade do educador, a responsabilidade educacional, é uma responsabilidade por algo que não pode ser conhecido de antemão – é uma responsabilidade *sem* conhecimento daquilo pelo qual se é responsável. (BIESTA, 2013, p. 152-153)

As coisas da terra lhe davam gala.

Se batesse um azul no horizonte seu olho

entoasse.

Todos lhe ensinavam para inútil

Aves faziam bosta nos seus cabelos.

Essa discussão traz para os espaços formativos, então, uma orientação: as qualidades do ensinar para o inútil. É nesse sentido que uma didática da invenção da formação de professores de matemática tem a ver com a constituição de tensionamentos, invenções, suspensões, profanações. Trata-se de pensar a formação em sua potência criadora e os processos formativos como espaços/tempos livres e coletivos nos quais os professores possam romper com formas inerciais de se relacionar com a matemática. Uma didática da invenção da formação de professores de matemática que seja

> [...] um movimento do pensamento, uma direção tradutória dos atos curriculares – por si próprios, transcriadores de elementos artísticos, filosóficos e científicos. Tradução, que implica menos transportar ou transpor [...] os sentidos de uma língua para outra e mais verter ou recriar: dotando-se da consistência de romper com o estabelecido; empreendendo novos recomeços; apropriando-se do antigo ou do estrangeiro e tornando-os seus, ao entrecruzá-los com a língua didática e fazer ressoar a sua voz. (CORAZZA, 2015, p. 108)

XVI

A matemática como deus mais sábio, mais milagroso e mais poderoso constitui um *ethos* da formação de professores de matemática: um conjunto de políticas de formação – governamentais, subjetivas, epistemológicas, sociais etc. – que produzem um cenário de disputa entre sujeitos e seus interesses. No olhar para essas disputas e para as posições nela assumidas, a formação de professores de matemática deixa de ser apenas um problema teórico: ela constitui como um problema *político*.

É nesse sentido que afirmamos que a formação de professores de matemática envolve-se, também, em uma *responsabilidade política*. Mais do que uma inserção e tomada de posição nas disputas que se constituem no jogo da formação de professores, a responsabilidade política tem a ver com uma entrada em um campo ingovernável da formação, um campo de pequenas formas e forças, quase miseráveis, que opera meticulosamente no conjunto de políticas que envolvem a formação de professores: uma dimensão *micropolítica* da formação.

Envolver-se em uma responsabilidade atenta às micropolíticas revela uma preocupação sobre como se cruzam na formação de professores as diferenças entre formas e forças do cenário de disputa mais visível da formação – aquelas que, como argumenta Biesta (2013, p. 105), convertem-se em políticas com a tarefa de "constituir o consenso, manter os acordos e consolidar as comunidades e identidades" – e formas e forças outras que poderiam revelar uma formação que não está governada pelos diferentes aspectos que usualmente a compõem, mas que acontece nos silêncios, nos abandonos, nas entremências.

Entra um chamejamento de luxúria em mim:
Ela há de se deitar sobre meu corpo em toda a espessura de sua boca!

Agora estou varado de entremências.

(Sou pervertido pelas castidades? Santificado pelas imundícias?)

Há certas frases que se iluminam pelo opaco.

Nesse sentido, a responsabilidade política constitui-se junto ao engajamento com o outro e a outridade. Uma tentativa de realizá-los politicamente e torná-los, ainda que momentânea e localmente, política de formação. Um novo jogo que nos coloca em um estado em que não sabemos se os processos formativos são pervertidos pelas castidades ou santificado pelas imundícies: iluminar processos formativos pelo opaco.

XXI

Ocupo muito de mim com o meu desconhecer.

Sou um sujeito letrado em dicionários.

Não tenho que 100 palavras.

Pelo menos uma vez por dia me vou no Morais

ou no Viterbo.

A fim de consertar a minha ignorãça,

mas só acrescenta.

Despesas para minha erudição tiro nos almanaques:

– Ser ou não ser, eis a questão.

Ou na porta dos cemitérios:

-Lembras que és pó e que ao pó tu voltarás.

Ou no verbo das folhinhas:

-Conhece-te a ti mesmo.

Ou na boca do povinho:

-Coisa que não acaba no mundo é gente besta

e pau seco.

etc

etc

etc

Maior que o infinito é a encomenda.

Uma didática da invenção na/da formação do professor de matemática clama, paradoxalmente, por uma *desinvenção*. Não, não uma desinvenção da ordem da destruição do invento, mas uma des-invenção que desliza o inventado. Uma desinvenção que resiste e luta contra o particípio que insiste em territorizalizar-se em verdade, na normalização de formas de pensar, de fazer e de ser. A desinvenção que proclamamos aqui trata de inventar novos mundos para uma política de formação de professores que se ocupe do seu desconhecer, de sua *ignorãça*. Trata-se de abandono do apreço pelas formas para dar vazão a um movimento constante de transformação sensível ao mundo, à escola, aos alunos e, finalmente, aos professores.

XIV

Poesia é voar fora da asa.

ARENDT, H. *Entre o passado e o futuro*. São Paulo: Perspectiva, 2011.

BARROS, M. de. *O livro das invencionices*. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1993.

BIESTA, G. *Para além da aprendizagem:* educação democrática para o futuro humano. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CLARETO, S. M. *Terceiras Margens:* um estudo etnomatemático de espacialidades em Laranjal do Jari (Amapá). 2003. 254 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2003.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática e educação. *Educação e Reflexão*, Santa Cruz do Sul, v. 10, n. 1, p. 7-20, jan./jul. 2002.

GOMES, M. L. M. Os 80 anos do primeiro curso de Matemática brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 424-438, mai./ago. 2016.

MASSCHELEIN, J.; SIMONS, M. *Defensa de la Escuela:* una cuestión pública. Buenos Aires: Mino y Dávila, 2014.

ROTONDO, M. A. S.; CAMMAROTA, G. Numa medianera da educação matemática: tramar com formação de professores e professoras. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande, v. 10, n. 22, p. 152-170. 2017.

SOUZA, M. C. R. F. de; FONSECA, M. C. F. R. Razão cartesiana, matemática e sujeito: olhares foucaultianos. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, v. 35, p. 303-318, set./dez. 2010.

Processos formativos em educação matemática: Perspectivas pragmáticas

Capítulo cinco

Processos formativos envolvendo o uso de tecnologias digitais em educação matemática

Rita de Cássia Idem[1]
Ricardo Scucuglia R. da Silva[2]

O desenvolvimento das tecnologias digitais e sua crescente inserção em diversos setores têm causado grandes transformações sociais, econômicas e culturais nas últimas décadas. As formas como os indivíduos se relacionam entre si e com o mundo ao seu redor alterou-se radicalmente devido a potencialização do acesso à informação e à comunicação. A progressiva inclusão das tecnologias digitais de informação e comunicação interfere no modo de pensar, agir, se relacionar e adquirir conhecimento, culminado na criação de uma nova cultura e de uma nova sociedade (KENSKI, 2003).

Freitas et al. (2005) consideram que a educação e o trabalho docente são primordiais na formação dos cidadãos dessa sociedade informatizada e globalizada. Além disso, no cenário atual, o modelo transmissivo de educação já não contempla as necessidades formativas dos alunos (IMBERNÓN, 2011), como observa Vaillant (2015, p. 38)

---

[1] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, campus Rio Claro. Mestre em Educação Matemática pela Unesp, campus Rio Claro. Licenciada em Ciências com Habilitação em Matemática pela USP, Campus São Carlos. Integrante do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM).

[2] Professor do Departamento de Educação do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP, campus São José do Rio Preto. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, campus Rio Claro. Integrante do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM).

> As formas tradicionais de ensinar já não servem porque a sociedade e os estudantes se modificaram. Os lugares para aprender, os sistemas de acesso à informação, as possibilidades de intercâmbio e de comunicação foram ampliados; entretanto, os objetivos educacionais, a forma de organizar o ensino e as condições dos professores são mantidos praticamente inalterados.

A formação docente, então, passa a ter "importância cultural e política, pois são eles [os professores] os responsáveis pela condução dos processos de socialização e formação das novas gerações, por meio da escolaridade" (GOMES, 2015, p. 203). Nesse sentido, as tecnologias digitais têm grande potencial de transformação dos processos educativos ao imporem "novos ritmos e dimensões à tarefa de ensinar e aprender" (KENSKI, 2003, p. 30). Entretanto, o simples uso das tecnologias digitais não garante mudanças no ensino, é preciso que elas sejam contextualizadas a perspectivas pedagógicas e disciplinares que envolvem a prática docente. Sendo assim, é necessário formar profissionais que sejam capazes de refletir sobre as tecnologias digitais e inseri-las em suas práticas de modo a promover um ensino condizente com as novas exigências da sociedade digital.

Nesse contexto, a formação tecnológica do professor passa a ser fundamental. A seguir, apresentamos o construto teórico "Conhecimento Pedagógico Tecnológico de Conteúdo"[3] (TPACK) que oferece um modelo guia para a prática docente e para a formação tecnológica de professores.

O TPACK na Prática e na Formação Docente

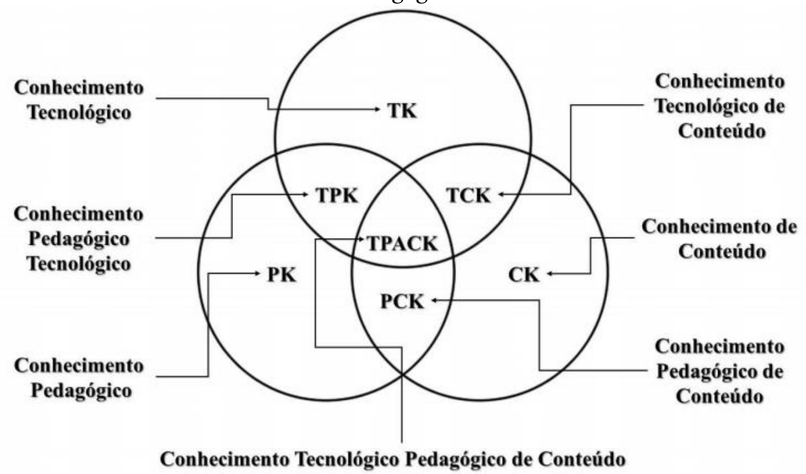
Apenas a presença da tecnologia digital na escola não garante que mudanças educacionais ocorram. A efetiva inserção das tecnologias digitais no ensino, dentre outros aspectos, deve ocorrer por meio da construção de um conhecimento docente que estabeleça

[3] *Technological Pedagogical Content Knowledge*

relações entre "usuários, tecnologias, práticas e ferramentas"[4] (KOEHLER; MISHRA, 2005, p. 132, tradução nossa). E esse conhecimento, que se relaciona à tecnologia, deve estar também relacionado ao contexto educacional.

Dessa forma, para expressar o conhecimento necessário à inserção das tecnologias digitais no ensino, Koehler e Mishra (2005) propõem um modelo que associa de três formas de conhecimento: o Conhecimento de Conteúdo, o Conhecimento Tecnológico e o Conhecimento Pedagógico. A proposta não considera esses conhecimentos de forma separada, mas sim a articulação entre eles (Figura 5.1).

Figura 5.1: Articulações entre os Conhecimentos de Conteúdo, Tecnológicos e Pedagógicos



Fonte: Koehler e Mishra (2009, p. 63)

O Conhecimento Tecnológico (TK) é o conhecimento sobre a utilização de tecnologias, como livros e lousa, e de tecnologias digitais, como computadores, programas e Internet. O Conhecimento Tecnológico se assemelha ao conceito de literacia tecnológica,

[4] *users, technologies, practices, and tools*.

entretanto, o trabalho docente requer um conhecimento mais profundo acerca das tecnologias.

O Conhecimento de Conteúdo (CK) se refere ao conhecimento sobre a matéria específica. O que inclui "conhecimento de fatos centrais, conceitos, teorias e procedimentos dentro de um determinado campo; conhecimento de estruturas explicativas que organizam e conectam ideias; e conhecimento das regras de evidência e prova"[5] (MISHRA; KOEHLER, 2008, p. 4, tradução nossa). Essa forma de entendimento fornece quatro elementos que auxiliam a compreensão da área específica, são eles: saberes relativos a fatos, conceitos e relações; métodos sobre o processo de construção e validação de conhecimentos específicos; os propósitos que justificam a existência da disciplina; e formas de representação desses conhecimentos por meio de símbolos e linguagens específicas. A articulação de saberes, métodos, propósitos e representações torna possível a compreensão de uma dada disciplina.

O Conhecimento Pedagógico (PK) é aquele que se relaciona aos processos e práticas de ensino e de aprendizagem, por meio do qual o professor

> compreende como os alunos constroem conhecimento e adquirem habilidades; desenvolver hábitos mentais e disposições positivas para a aprendizagem [...] [e] requer uma compreensão das teorias cognitivas, sociais e de desenvolvimento da aprendizagem e como elas se aplicam aos alunos em sua sala de aula.[6] (MISHRA; KOEHLER, 2008, p. 6, tradução nossa).

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) considera a relação entre o Conteúdo e a Pedagogia. Dessa forma, entende-se que dependendo do conteúdo, a forma como ele é ensinado varia.

---

[5] knowledge of central facts, concepts, theories and procedures within a given field; knowledge of explanatory frameworks that organize and connect ideas; and knowledge of the rules of evidence and proof.

[6] understands how students construct knowledge and acquire skills; develop habits of mind and positive dispositions towards learning [...] [and] requires an understanding of cognitive, social and developmental theories of learning and how they apply to students in their classroom.

Por meio dessa visão, o conhecimento disciplinar é transformado de acordo com os propósitos do ensino. Essa forma de conhecimento foi estabelecida por Shulman (1986; 1987). Refletindo sobre a avaliação docente, ele observou que durante muitas décadas somente o Conhecimento de Conteúdo era utilizado na avaliação docente, significando, portanto, que somente o conhecimento específico dava condições para a prática do ensino desse conteúdo específico. Na década de 1980, ele observou que houve maior valorização de Conhecimentos Pedagógicos gerais, devido às pesquisas educacionais da época. Com base nessa reflexão, ele considera que tanto os Conhecimentos de Conteúdo quanto os Conhecimentos Pedagógicos são importantes na prática e na formação docente, entretanto, a base de conhecimento docente mais importante é a articulação entre essas duas formas de conhecimento, o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo.

As tecnologias influenciam as diversas áreas do conhecimento e elas podem potencializar ou restringir as formas pelas quais o conteúdo específico é representado. Dessa forma, os professores precisam entender o conteúdo que ensinam e como as tecnologias digitais podem reorganizar a forma como esses conteúdos são ensinados ou mesmo quais tecnologias digitais são mais adequadas ou não para o ensino de determinado conteúdo, ou seja, necessitam do desenvolvimento de um Conhecimento Tecnológico de Conteúdo (TCK).

O Conhecimento Pedagógico Tecnológico (PTK) diz respeito a como o ensino e a aprendizagem transformam-se de acordo com a tecnologia empregada. Os professores precisam compreender as possibilidades pedagógicas das tecnologias digitais disponíveis e saber articulá-las a estratégias pedagógicas condizentes com os objetivos de ensino. Assim, esse conhecimento exige entendimentos tecnológicos e como esses entendimentos se articulam ao contexto didático-pedagógico.

O Conhecimento Pedagógico Tecnológico de Conteúdo (TPACK) é a integração das três bases de conhecimento. O que inclui

> um entendimento de como representar conceitos com tecnologias, técnicas pedagógicas que utilizam tecnologias de maneira construtiva para ensinar conteúdos; conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender e como a tecnologia pode ajudar os alunos a aprender; entendimento dos conhecimentos prévios dos alunos e de teorias da epistemologia; e conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para construir sobre o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas.[7] (MISHRA; KOEHLER, 2008, p. 10, tradução nossa).

Esse quadro teórico influencia os modelos de formação docente para a inserção das tecnologias no ensino, pois, por meio dele, é recomendado que a formação tecnológica docente não deva isolar esses conhecimentos, mas sim, apresentá-los e desenvolvê-los de forma articulada. Como apontam Koehler e Mishra (2005, p. 134, tradução nossa) o desenvolvimento do TPACK "requer um sistema curricular que honraria as complexas relações multidimensionais tratando os três componentes de uma forma epistemológica e conceitualmente integrada"[8].

Consideramos o Construcionismo uma perspectiva Tecnológica Pedagógica que pode estar associada à prática e à formação docente para a inserção das tecnologias digitais no ensino na abordagem do TPACK. Considerações sobre o ensino e a formação na perspectiva construcionista são feitas a seguir.

O Construcionismo

Os computadores são utilizados na educação desde a década de 1950. No início da utilização das tecnologias digitais na educação,

---

[7] an understanding of how to represent concepts with technologies, pedagogical techniques that use technologies in constructive ways to teach content; knowledge of what makes concepts difficult or easy to learn and how technology can help students learn; knowledge of students' prior knowledge and theories of epistemology; and knowledge of how technologies can be used to build on existing knowledge and to develop new epistemologies or strengthen old ones.

[8] requires a curricular system that would honor the complex, multi-dimensional relationships by treating all three components in an epistemologically and conceptually integrated manner.

essa mídia era utilizada na perspectiva behaviorista de Skinner, como "máquinas de ensinar" (VALENTE, 1999). Nessa perspectiva, entretanto, o aluno ainda se encontra na condição de passivo no processo de aprendizagem.

Seymour Papert foi um dos críticos a essa forma de uso do computador, para ele, essa tecnologia digital possui potencial de transformação do ensino. Com base nessa ideia, fundamentou uma teoria que busca a mudança de papéis dos alunos no processo de aprendizagem. No Construcionismo não é o computador que ensina o aluno, mas sim o aluno que ensina o computador e, nessa interação, pode aprender.

Considerando as ideias do Construcionismo, Papert e outros pesquisadores do MIT[9] desenvolveram um programa educacional que buscava promover a transformação do ensino, o *software* LOGO. Nele, os alunos poderiam se utilizar de linguagens de programação simples e potencializar o aprendizado. Segundo Papert (1980, p. 5, tradução nossa) ao utilizar o LOGO, o aprendiz programa o computador

> e ao fazer isso, adquire um senso de domínio sobre uma parte da mais moderna e poderosa tecnologia e estabelece um contato íntimo com algumas das ideias mais profundas da ciência, da matemática e da arte de construir modelos intelectuais.[10]

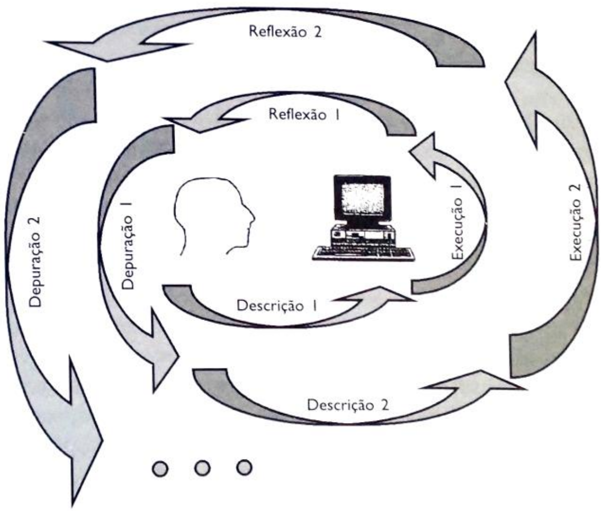
Valente (2005) explica como ocorre a interação do aluno com o computador em um ambiente de aprendizagem construcionista por meio do Ciclo de Ações. As ações do ciclo são: descrição, execução, reflexão e depuração. O processo se inicia com a proposição de uma tarefa em que o aluno deve resolver com o auxílio do computador. O aluno pensa na solução e **descreve** em meios que o computador possa entender (no LOGO, a descrição ocorre por meio da linguagem de

[9] Massachusetts Institute of Technology (http://web.mit.edu)

[10] and, in doing so, both acquires a sense of mastery over a piece of the most modern and powerful technology and establishes an intimate contact with some of the deepest ideas from science, from mathematics, and from the art of intellectual model building.

programação). O computador, então, **executa** a solução descrita pelo aluno. Ao observar a execução do computador, **reflete** sobre ela: se aquilo que foi observado corresponder às expectativas dele para a solução do problema, o ciclo se encerra para aquela tarefa e ele pode realizar uma nova tarefa; entretanto, se o observado apresentar incongruência em relação à expectativa de solução, o aluno passa a realizar a etapa seguinte do Ciclo de Ações. A **depuração** ocorre quando é identifica erro na execução do computador, nesse processo, então, o aluno deve buscar e corrigir o erro, o que leva a uma nova descrição, execução, reflexão, depuração e assim por diante. As ações são cíclicas, mas, cognitivamente, o processo ocorre em uma espiral, a Espiral de Aprendizagem (Figura 5.2), pois "a concepção como tais ações contribuem para o desenvolvimento do conhecimento" (VALENTE, 2005, p. 67).

Figura 5.2: A Espiral da Aprendizagem



Fonte: Maltempi (2004, p. 271), adaptado de Valente (1993)

O professor tem um papel fundamental em um ambiente de aprendizagem construcionista, ele é considerado o agente de aprendizagem. Sua função é estimular e mediar a interação do aprendiz com o computador, uma vez que as ações construcionistas não são espontâneas, como aponta Maltempi (2000, p. 18)

> Na verdade, as atividades de descrição, reflexão e depuração não ocorrem simplesmente colocando o aprendiz em interação com o computador. Mesmo em um ambiente construcionista, no qual o aprendiz esteja desenvolvendo algo de significado pessoal, essas atividades muitas vezes são árduas e demandam um grande esforço e concentração do mesmo. O aprendiz sozinho dificilmente teria sucesso em transformar o ciclo em uma atividade estimulante e rica em termos de construção de conhecimento.

Nesse contexto, é necessário formar o profissional da educação para que possa assumir seu papel de agente de aprendizagem em um contexto construcionista de ensino. Valente (1999, p. 84) discute essa necessidade formativa do professor

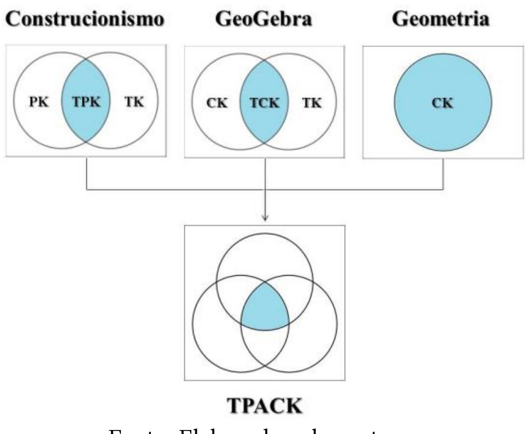
> O professor necessita ser formado para assumir o papel de facilitador dessa construção de conhecimento e deixar de ser o "entregador" da informação para o aprendiz. Isso significa ser formado tanto no aspecto computacional, de domínio do computador e dos diferentes softwares, quanto no aspecto da integração do computador nas atividades curriculares. O professor deve ter muito claro quando e como usar o computador como ferramenta para estimular a aprendizagem. Esse conhecimento também deve ser construído pelo professor, e acontece à medida que ele usa o computador com seus alunos e tem o suporte de uma equipe que fornece os conhecimentos necessários para o professor ser mais efetivo nesse novo papel. Por meio desse suporte, o professor poderá aprimorar suas habilidades de facilitador e, gradativamente, deixará de ser o fornecedor da informação, o instrutor, para ser o facilitador do processo de aprendizagem do aluno – o agente de aprendizagem.

Sendo assim, considerando o modelo de formação tecnológica docente TPACK, o Construcionismo deve integrar a perspectiva Pedagógica Tecnológica, entretanto, faz-se necessário a articulação de outros conhecimentos de modo a promover a articulação necessária. Com base nessa ideia tem-se buscado a articulação de outros elementos com a finalidade de investigar a formação tecnológica do professor de Matemática.

TPACK e Construcionismo na Formação Tecnológica de Professores de Matemática

Considerando a perspectiva TPACK, a formação deve estabelecer meios para que os professores reflitam e construam conhecimentos articulados das perspectivas Pedagógicas, Tecnológicas e de Conteúdo. Sendo assim, desenvolvemos uma ação formativa integrando o Construcionismo como perspectiva Pedagógica de Conteúdo, o GeoGebra como perspectiva Tecnológica de Conteúdo, e as Geometrias Plana e Espacial como perspectivas de Conteúdo. Com base nesses três elementos, promovemos um curso destinado a professores e futuros professores de Matemática, com a intenção de apresentar e discutir as possibilidades do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Geometria, e objetivando a construção de Conhecimentos Pedagógicos Tecnológicos de Conteúdo. Na Figura 5.3, a seguir, apresentamos os três elementos, que integrados, buscavam a constituição do TPACK.

Figura 5.3: Perspectivas na formação tecnológica do professor de Matemática



Fonte: Elaborado pelos autores

O GeoGebra é um software educacional dinâmico de Matemática, que possibilita a exploração e a investigação matemática, potencializando a visualização (BORBA; SCUCUGLIA: GADANIDIS, 2013). Ele é indicado para todos os níveis de ensino e pode ser aplicado na aprendizagem de diversas áreas da Matemática, como Geometria, Álgebra, Aritmética, Cálculo e Estatística. No que tange ao ensino da Geometria, a possibilidade de exploração de Geometria Dinâmica do GeoGebra permite o desenvolvimento de construções no plano e no espaço, culminando em uma tecnologia digital com potencialidade para o ensino e para a aprendizagem de Geometrias Plana e Espacial. De acordo com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2013), o GeoGebra é um dos softwares educacionais de maior destaque na atual fase do uso de tecnologias digitais em Educação Matemática. Considerando-se processos significativos com relação a produção de conhecimentos matemáticos, os autores enfatizam a *experimentação com tecnologias*.

No curso supracitado, o GeoGebra foi a tecnologia digital escolhida para o desenvolvimento de atividades sobre Geometrias Plana e Espacial. As atividades possuíam caráter investigativo e exploratório. Elas objetivavam apresentar potencialidades do GeoGebra para o ensino e para a aprendizagem de Geometria, articulando a isso, um ambiente de aprendizagem construcionista.

Além das atividades sobre Geometria, que estimulavam as ações construcionistas e possibilitavam a vivência de uma nova forma de aprendizagem, ocorreram discussões sobre as possíveis mudanças que as tecnologias digitais podem causar nos processos educativos.

A experiência formativa se desenvolveu por meio de um curso de extensão universitária destinado a professores e futuros professores de Matemática. Ele ocorreu em seis encontros de três horas cada, em junho de 2016, em uma universidade pública paulista. Sendo também cenário para uma pesquisa de Mestrado, com abordagem qualitativa, que busca investigar os conhecimentos do

TPACK mobilizados pelos participantes e as articulações entre o TPACK e o Construcionismo no referido cenário.

Considerando o curso de extensão universitária, a produção de dados da pesquisa mencionada se deu por meio de filmagens do curso, captura da tela do computador com gravação simultânea de áudio, coleta do registro escrito das atividades, desenvolvimento de atividades pelos participantes e entrevistas semiestruturadas com os mesmos após a realização do curso. A seguir, apresentamos a análise parcial dos dados, enfatizando a articulação entre o TPACK e o Construcionismo observado no desenvolvimento do curso de extensão universitária.

Articulação entre TPACK e Construcionismo em uma Experiência Formativa

Na realização de tarefas sobre Geometria com o GeoGebra, verificamos que ocorreram situações características de uma aprendizagem construcionista, aliando a isso, possibilidades de exploração geométrica proporcionadas pela Geometria Dinâmica. Em tais momentos, houve grande manifestação de Conhecimentos de Conteúdo, Conhecimentos Tecnológicos e suas articulações.

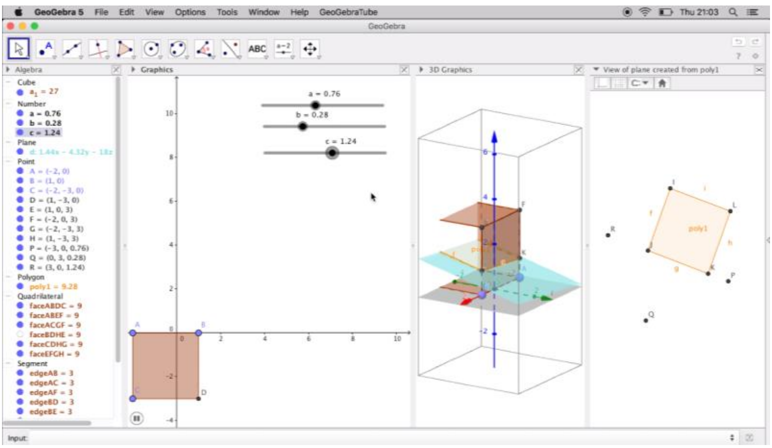
As atividades, considerando a maneira como foram construídas e como foram conduzidas pelos participantes, ocorreram de duas formas distintas. Algumas atividades possuíam caráter “mais aberto”, ou seja, as instruções não eram tão definidas e os participantes puderam ser livres para explorar as ferramentas do GeoGebra de maneira criativa. Outras atividades possuíam caráter “mais fechado”, as quais apresentavam instruções melhor definidas, por meio das quais, as construções a serem exploradas deveriam ser construídas.

Nas explorações de atividades de caráter mais “aberto”, pudemos verificar a emergência de Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo. Nesses momentos, os participantes demonstraram a articulação entre os conhecimentos em relação à Geometria e ao

GeoGebra. Nas explorações de atividades de caráter mais "fechado", verificamos a maior incidência de Conhecimentos de Conteúdo.

Na exploração de uma atividade de caráter "fechado" que almejava a investigação da interseção de poliedros com números diferentes de faces e um plano (Figura 5.4), buscava-se a sistematização do número de lados do polígono formado na interseção em relação ao número de faces do poliedro explorado. Na realização dessa atividade, identificamos a manifestação de um Conhecimento de Conteúdo por um dos participantes, após a investigação ele diz "A relação é essa então, o número de faces é o número máximo que eu posso formar". Esse conhecimento emergente foi fruto da investigação incitada pela atividade e pelas ferramentas do GeoGebra, mas principalmente, pelo potencial de visualização. Para Diković (2009, p. 193, tradução nossa, grifo nosso) "A visualização que é possível com o *software* dinâmico de hoje permite ao estudante ver e explorar as relações matemáticas e os conceitos que eram difíceis de 'mostrar'"[11] sem as tecnologias digitais.

Figura 5.4: Exploração da interseção de um cubo por um plano



Fonte: Dados da pesquisa

[11] The visualization that is possible with today's dynamic software enables the student to see and explore mathematical relations and concepts that were difficult to 'show'.

Na realização das discussões e das entrevistas, majoritariamente, ocorreu a manifestação de Conhecimentos Tecnológicos, Pedagógicos e suas inter-relações. Nas discussões, os participantes demonstraram conhecimentos acerca da mudança de papel dos professores frente as tecnologias digitais e também em relação a barreiras enfrentadas na inserção das tecnologias digitais no ensino.

Nas entrevistas, os participantes puderam argumentar sobre suas impressões em relação à experiência formativa em um ambiente de aprendizagem construcionista, articulado ao GeoGebra e à Geometria. Em suas falas, fazem-se presentes impressões sobre a potencialidade do GeoGebra na construção de conhecimento, caracterizando um Conhecimento Pedagógico Tecnológico. Para uma das participantes, a utilização do GeoGebra pode fazer com que alunos construam conhecimentos, e, com isso, fazendo com que o ensino deixe de ser transmissivo, ela aponta

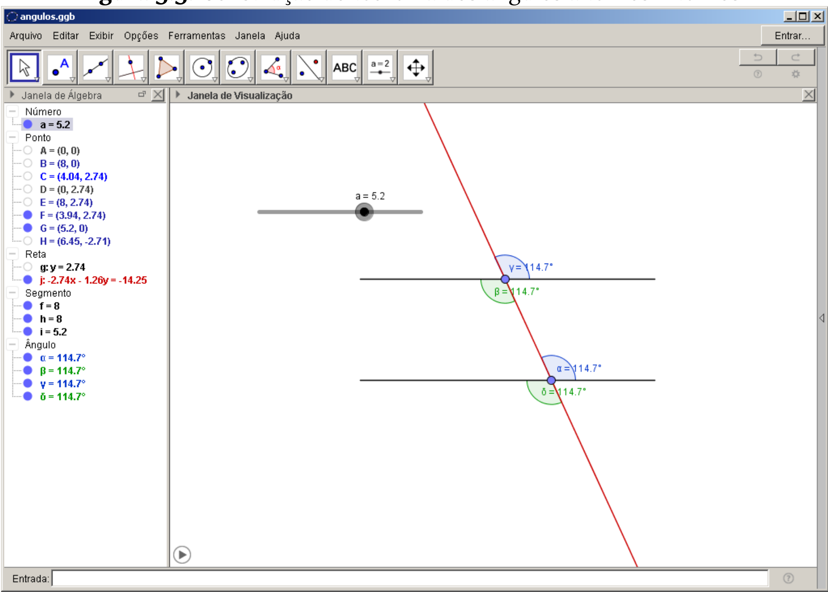
> Se você conseguir construir uma atividade e tiver a oportunidade de fazer uma atividade assim com os alunos [...], eu acho que eles só têm a ganhar. E [...] eu não preciso dar algumas conclusões em sala de aula [...]. Talvez eles construindo eles cheguem a essa conclusão sozinhos, e não eu como professora, vou ter que falar na lousa pra eles.

Além da realização de tarefas no GeoGebra, os participantes foram convidados a desenvolverem suas próprias atividades para o ensino da Geometria. Articulando a análise dessas atividades com momentos das entrevistas em que os participantes comentavam sobre elas, foi possível identificar a mobilização de Conhecimentos Tecnológicos Pedagógicos do Conteúdo.

Uma das participantes construiu uma atividade explorando diversas ferramentas do GeoGebra e o Teorema dos Ângulos Alternos Internos (Figura 5.5). A construção no GeoGebra dessa atividade evidencia a mobilização de conhecimentos Tecnológicos, de Conteúdo e suas articulações. Ao falar sobre a atividade na entrevista, a participante argumenta sobre a possibilidade de construção do conhecimento geométrico por parte do aluno; assim, observamos a manifestação do TPACK, ela diz

> Se eu falar pra você que os ângulos internos são iguais, você vai acreditar em mim, e daí você vai usar isso. Então, mostra pra mim que eles são iguais. [...] Eu acho que essa parte é muito interessante. Porque eu sou muito contra as pessoas falarem, darem resposta direto, eu acho você tem que pesquisar e com você mesmo ver como você vai mostrar aquilo.

Figura 5.5: Construção do teorema dos ângulos alternos internos



Fonte: Dados da pesquisa

Com análise dos dados pudemos observar que o curso conduzido proporcionou aos participantes vivências e reflexões importantes para sua formação tecnológica. O desenvolvimento de atividades sobre Geometria com o GeoGebra num contexto de aprendizagem construcionista oportunizou aos participantes um contato com perspectivas Tecnológicas, Pedagógicas e de Conteúdo. A realização das atividades articulada a uma reflexão sobre o ensino mediado por tecnologias fez com os participantes pudessem entender a mudança de papel do professor na sociedade tecnológica e as barreiras impostas à inserção. Esses dois elementos se mostraram primordiais no desenvolvimento de atividades pelos participantes, pois eles puderam articular conhecimentos sobre o GeoGebra e sobre a Geometria a um contexto de mudança de papéis de alunos e professores em perspectiva pedagógica transformadora dos processos educativos.

Conclusões

A articulação entre o TPACK e o Construcionismo evidencia dois aspectos que se fazem presente na formação docente: a compartimentalização do conhecimento docente e a vivência do ensino transmissivo.

A formação universitária de professores, em especial de professores de Matemática, supervaloriza o conhecimento específico da disciplina. A universidade oferece uma "formação com foco na área disciplinar específica, com pequeno espaço para a formação pedagógica" (GATTI; SÁ; ANDRÉ, 2011, p. 98). Por meio das ideias de Shulman (1986; 1987), entendemos que o conhecimento docente não deve ser fragmentado e sim possuir uma harmonia em relação aos seus aspectos pedagógicos e de conteúdo.

Frente às mudanças econômicas e sociais ocasionadas pelas tecnologias digitais, são impostos novos papéis às escolas e aos professores. Estes devem preparar adequadamente os cidadãos para a nova sociedade digital. Assim, Koehler e Mishra (2005; 2009) e Mishra e Koehler (2008) reformulam as ideias de Shulman (1986; 1987) de modo a oferecer novos horizontes para a prática e para a formação docente, enfatizando que os conhecimentos necessários para a inserção das tecnologias digitais (Conhecimentos

Tecnológico, Pedagógicos e de Conteúdo), devem ser integrados de modo a garantir a efetiva inserção.

Por outro lado, considerar o Construcionismo como perspectiva formativa, no contexto do TPACK, é proporcionar aos docentes e futuros docentes, a vivência de uma experiência de aprendizagem que altera os papéis de professores e futuros professores no contexto educacional. A aprendizagem construcionista considera o professor como guia da construção do conhecimento e não seu detentor. Além disso, o Construcionismo evidencia o potencial das tecnologias digitais de promover a alteração de papéis nos processos de ensino e aprendizagem, bem como, o potencial de transformação da educação.

Apresentamos um exemplo de como essas ideias se concretizaram no contexto formativo. Tivemos como objetivo promover a mobilização do TPACK por meio de um curso de extensão universitária destinado a professores e futuros professores. Nessa experiência, verificamos que a constituição desse conhecimento é bastante complexa. Para o curso supracitado, procuramos integrar o GeoGebra, a Geometria e o Construcionismo, proporcionando aos participantes do curso o desenvolvimento de atividades investigativas, por meio das quais, foi possível explorar a Geometria no GeoGebra, em um ambiente de aprendizagem construcionista.

No desenvolver das atividades, foi possível aos participantes mobilizar conhecimentos sobre Geometria (Conhecimentos de Conteúdo), sobre o GeoGebra (Conhecimentos Tecnológicos) e sobre a integração desses elementos (Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo).

Entretanto, a simples vivência da tecnologia não foi suficiente. Por meio de reflexões e discussões sobre as tecnologias digitais e seu impacto nos processos educativos, foi possível mobilizar conhecimentos relativos à mudança do papel do professor, às barreiras a serem enfrentadas para a inserção das tecnologias digitais e às potencialidades das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem. Tais momentos foram identificados como evidências da emergência de Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos e Pedagógicos Tecnológicos.

É importante destacar que outras perspectivas teóricas sobre o uso de tecnologias em Educação Matemática, além do Construcionismo, têm grande potencial neste cenário. Podemos evidenciar neste sentido a noção denominada *seres-humanos-com-mídias* (BORBA; VILLARREAL, 2005). Estudos desenvolvidos por pesquisadores do Grupo de Pesquisa em Informática, outra Mídias e Educação Matemática (GPIMEM/UNESP Rio Claro) indicam que, além de existirem complementariedades entre esta noção e a ideia de Construcionismo, há grande sinergia metodológica entre ambas perspectivas e o TPACK.

No caso específico da pesquisa discutida neste capítulo, o TPACK foi identificado nos momentos em que os participantes integraram os conhecimentos mobilizados no decorrer das atividades e nas discussões, para o desenvolvimento de suas próprias atividades. A construção de atividades pelos participantes fomentou a mobilização de conhecimentos integrados sobre o GeoGebra, a Geometria e os processos de ensino e aprendizagem no contexto das tecnologias digitais.

Por fim, verificamos que, com a integração de elementos complementares da perspectiva TPACK (Construcionismo, GeoGebra e Geometria), a formação docente pode oferecer meios para que professores e futuros professores possam explorar tecnologias digitais, refletir sobre seus impactos no ensino e desenvolver entendimentos sobre como o ensino com tecnologias digitais deve ocorrer de modo a promover transformações educativas.

Referências

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:* sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:* information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

DIKOVIĆ, L. Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *ComSIS*, Novi Sad, v. 6, n. 2, p. 191-203, dez. 2009.

FREITAS, M. T. A.; NACARATO, A.; PASSOS, C.; FIORENTINI, D.; FREITAS, F.; ROCHA, L.; MISKULIN, R. O desafio de ser professor de Matemática hoje no Brasil. In: FIORENTINI, D. NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.* Campinas: Musa, 2005. p. 89-106.

GATTI, B. A.; SÁ, E. S.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Políticas docentes no Brasil*: um estado da arte. Brasília: UNESCO, 2011.

GOMES, M. O. Residência educacional. In: SILVA JUNIOR, C. A. et al. *Por uma revolução no campo de formação de professores.* 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015. p. 203-217.

IMBERNÓN, F. *Formação docente e profissional:* formar-se para a mudança e a incerteza. Tradução de Silvana Cobucci Leite. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

KENSKI, V. M. *Tecnologias e ensino presencial e a distância.* Campinas: Papirus, 2003.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. What happens when teachers design educational technology? The development of technological pedagogical content knowledge. *Journal of Educational Computing Research*, Manchester, v. 32, n. 2, p. 131-152, 2005.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, Charlottesville, n.9, v.1, p. 60-70, 2009.

MALTEMPI, M. V. *Construção de páginas web*: depuração e especificação de um ambiente de aprendizagem. 2000. 197 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Introducing Technological Pedagogical Content Knowledge. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 2008, Nova Iorque. *Anais*... Nova Iorque: 2008, p. 1-16.

PAPERT, S. *Mindstorms*: children, computers and powerful ideas. Nova Iorque: Basic Books, 1980.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, Whashington, v. 15, n. 2, p. 4-14, Fev. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-27, 1987.

VAILLANT, D. Para uma mudança radical na formação inicial de professores. In: SILVA JUNIOR, C. A. et al (Org). *Por uma revolução no campo de formação de professores*. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015. p. 33-44.

VALENTE, J. A. *A Espiral da Espiral de Aprendizagem*: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. 2005. 238 f. Tese (Livre Docência) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2005.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de *softwares* usados na educação. In: VALENTE, J. A. (Org.). *Computadores na sociedade do conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. p. 71-87.

VALENTE, J. A. Por que computadores na educação? In: VALENTE, J. A. (Org.). *Computadores e conhecimento*: repensando a educação. Campinas: Editora da Unicamp, 1993. p. 24-44.

Capítulo seis

A educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental por meio da pedagogia de projetos

Alana Fuzaro de Barros Rodrigues[1]
Fernanda Passarini Melo[2]
Michele Frágua de Oliveira[3]
Mildren Lopes Wada Duque[4]

Introdução

Nesse capítulo discutimos questões referentes a Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em um ambiente escolar fundamentado na Pedagogia de Projetos (DEWEY, 1967). Inicialmente, apresentamos aspectos sobre esse nível de

[1] Professora dos anos finais do Ensino Fundamental da Escola Maria Peregrina. Licenciada em Matemática e Pedagogia. Mestranda do Programa Multidisciplinar Interunidades de Pós Graduação Strictu Sensu: Ensino e Processos Formativos (UNESP São José do Rio Preto/Ilha Solteira e Jaboticabal) na linha de Educação Matemática. alanafuzaro@gmail.com

[2] Professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental da Escola Maria Peregrina. Licenciada em Pedagogia. Possui Pós-Graduação Lato Sensu em Psicopedagogia Clínica e Institucional. Mestranda do Programa de Pós Graduação Strictu Sensu da Faculdade de Medicina de Rio Preto (FAMERP) na linha de Gestão e Educação em Saúde. ferpassarini@yahoo.com.br

[3] Professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental da Escola Maria Peregrina. Licenciada em Biologia e Pedagogia. Mestranda do Programa de Pós Graduação Strictu Sensu da Faculdade de Medicina de Rio Preto (FAMERP) na linha de Gestão e Educação em Saúde. michele@mariaperegrina.org.br

[4] Diretora da Escola Maria Peregrina. Psicóloga. Licenciada em Letras (Português/Inglês). Especialista em Psicopedagogia e Gestão Escolar. Mestre em Saúde e Educação pelo Programa de Pós Graduação Strictu Sensu da Faculdade de Medicina de Rio Preto (FAMERP). mildren@mariaperegrina.org.br

ensino em documentos curriculares, como a organização em blocos de conteúdos, metodologias de ensino e concepções sobre avaliação. Em seguida, discutimos a proposta pedagógica da Escola Maria Peregrina, enfatizando aspectos sobre Pedagogia de Projetos e Inteligências Múltiplas. Apresentamos um caso de aprendizagem matemática por meio de projetos de alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – Projeto Construção –, indicando perspectivas dos professores sobre o processo avaliativo.

Documentos Curriculares: Anos Iniciais

Ao analisarmos iniciativas conduzidas pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), notamos trabalhos interessantes realizados por meio de Grupos de Trabalho (GTs). O GT01 da SBEM, por exemplo, discute questões específicas sobre Educação Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Esteticamente, podemos notar grande diversidade de enfoques investigativos explorados em pesquisas desenvolvidas nesse GT.

> O GT01 tem como objetivos: discutir e divulgar investigações referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental nos quatro eixos: números e operações, grandezas e medidas, espaço e forma e educação estatística. São focos do GT01, investigações referentes a: a) formação inicial e continuada de professores de anos iniciais de escolarização; b) conhecimento de estudantes, deste nível de ensino, de conceitos matemáticos desenvolvidos dentro e fora da sala de aula; c) recursos didáticos para o ensino de Matemática na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental; d) inclusão e aprendizado de Matemática nestes anos de ensino (SBEM, 2012, s.n.).

Esse enfoque com relação aos eixos ou blocos de conteúdos na estruturação matemática curricular na Educação Básica são diretrizes fundamentais encontradas em documentos como os

Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – Matemática (BRASIL, 1997)[5]. Encontramos também uma estrutura semelhante no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo – Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI (SÃO PAULO, 2014)[6].

Com relação a metodologias de ensino de Matemática, os PCN discutem quatro vertentes principais: (a) resolução de problemas; (b) uso de tecnologias da informação; (c) jogos; e (d) história da matemática. Já o EMAI enfatiza a resolução de problemas como estratégia metodológica e faz menção ao uso de jogos e materiais manipulativos ao longo do documento. Uma vez que no EMAI a resolução de problemas é associada a problemas e situações do cotidiano, destaca-se também a ideia de aprendizagem significativa.

Além disso, destacamos a concepção de avaliação proposta nos PCN, que mencionam, por exemplo, o uso de fichas para o mapeamento do desenvolvimento de atitudes enfatizando certa continuidade, referentes a questões como: o aluno resolve problemas por seus próprios meios? Elabora perguntas? Usa estratégias criativas? Justifica suas respostas e as comunica com clareza? Participa de trabalhos em grupo? Os registros avaliativos, produzidos de maneira sistemática e contínua, são considerados nesse cenário indícios das competências dos estudantes.

No EMAI, a avaliação é conceituada com base em dois princípios fundamentais: (1) existência de um critério objetivo considerando a meta de aprendizagem estipulada e (2) contínuo planejamento e replanejamento visando a reorganização das metas de aprendizagem mediante o desempenho dos alunos ao longo do processo pedagógico. Tais princípios concebem avaliação como

> um processo de comparação entre o desejado e o realizado, confrontando-se o que se propõe nos objetivos com o que se foi capaz de realizar. Supõe certamente um juízo que o professor

---

[5] Educação estatística é explorada no âmbito do eixo "tratamento da informação".

[6] No quarto ano e no quinto ano do Ensino Fundamental há a inclusão do eixo "números racionais", o qual visa a exploração específica do conceito de fração.

> emite sobre a globalidade do trabalho de um aluno, durante um período determinado de tempo e o ajuda a tomar decisões sobre como prosseguir e planejar os próximos passos (SÃO PAULO, 2014, p. 41).

Mais recentemente, na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2016), encontramos uma significativa alteração referente aos eixos ou blocos de conteúdos em relação ao PCN e o EMAI. Atualmente, a estruturação proposta pelo Ministério da Educação é a seguinte:

- *Números*
- *Álgebra*
- *Geometria*
- *Grandezas e Medidas*
- *Probabilidade e Estatística*

A principal concepção relacionada aos blocos de conteúdos na BNCC refere-se ao *letramento matemático*, compreendido como o conjunto de competências e habilidades intrínsecas aos processos “de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2016, p. 222). Além disso, o letramento matemático diz respeito a produção de conhecimentos fundamentais para compreensão e atuação crítica no mundo e em sociedade. A BNCC, nesse sentido, destaca a resolução de problemas, a investigação matemática, trabalho com projetos e a modelagem matemática como metodologias ou atividades matemáticas fundamentais.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino

> Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático: raciocínio, representação, comunicação e argumentação (BRASIL, 2016, p. 222).

Com relação a avaliação, a BNCC não apresenta perspectivas específicas para avaliação Matemática. São apresentadas breves orientações gerais no início do documento, as quais propõe “construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos (BRASIL, 2016, p. 11). Além disso, o documento apresenta referências pontuais sobre avaliação em algumas matrizes de competências específicas de diferentes áreas ou disciplinas.

Portanto, como discutido nas próximas seções deste capítulo, argumentamos acerca da sinergia entre as atuais metodologias propostas em documentos curriculares atuais de matemática do Ensino Fundamental e o trabalho didático-pedagógico realizado na Escola Maria Peregrina, no que se refere a Pedagogia de Projetos e, em particular, a Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Buscaremos explicitar nuances acerca da complexidade avaliativa intrínseca na proposta pedagógica da escola.

A Escola Maria Peregrina

A Escola Maria Peregrina é uma instituição educacional particular, porém gratuita. Sua missão é formar cidadãos solidários, fraternos, justos, críticos, competentes, autônomos e atuantes. Para que a missão possa ser cumprida com eficácia e fidelidade, a prática pedagógica é baseada na singularidade de cada educando. São levados em consideração os aspectos sociais, culturais e a história educativa de cada um. Assim, cada aluno é visto como único e irrepetível.

Visando a singularidade de cada um e para que esta seja respeitada e valorizada em suas aprendizagens, utiliza-se a Pedagogia de Projetos. Esta metodologia vivenciada na Escola Maria Peregrina, é baseada no pressuposto de Dewey (1967) de que a escola deve ser a representação da vida real do aluno, trazendo, para seu aprendizado tudo aquilo que envolve sua vida dentro e fora da escola, ou seja, enfatizando a dimensão pragmática da Educação problematizando os papéis didáticos e pedagógicos dos professores e alunos. De acordo com Dewey (1959):

> Qual a razão por que, apesar de geralmente condenado, o método de ensino de verter conhecimentos – o mestre – e o absorvê-los passivamente – o aluno – ainda persiste tão arraigadamente na prática? Que a educação não consiste unicamente em "falar" e "ouvir" e sim em um processo ativo e construtor, é princípio quase tão geralmente violado na prática, como admitido na teoria. Não é essa deplorável situação devida ao fato de ser matéria meramente exposta por meio da palavra? Prega-se; leciona-se; escreve-se. Mas para se pôr a matéria ou a teoria em ato ou em prática exige-se que o meio escolar esteja preparado, em extensão raramente atingida, como locais e condições para agir e fazer com utensílios e materiais da natureza física. Exige-se, ainda, que se modifiquem os métodos de instrução e administração de modo a permitir e assegurar o contato direto e contínuo com as coisas. Não que se deva restringir o uso da linguagem como recurso educativo; e sim que esse será mais vital e fecundo normalmente articulado com a atividade exercida em comum (DEWEY, 1959, p. 41).

Na Escola Maria Peregrina, o engendramento entre Pedagogia de Projetos e conteúdos curriculares é, provavelmente, a maior e mais interessante problematização educacional dessa escola. Ao desenvolverem seus projetos, existem diversificados níveis de inserção dos conteúdos escolares de diferentes disciplinas por partes dos tutores dependendo da temática do projeto.

Os alunos reúnem-se em grupos de no máximo doze alunos[7] e escolhem o que querem pesquisar. As pesquisas saem do interesse dos discentes e não dos docentes ou da coordenação da escola. Nesse sentido, Dewey (1967, p.65) afirma que, “o legítimo princípio do interesse, entretanto, é o que reconhece uma identificação entre o fato que deve ser aprendido ou a ação que deve ser praticada e o agente que por essa atividade se vai desenvolver”. Cada grupo possui um tutor que é o orientador dos projetos realizados pela equipe.

Em cada projeto são desenvolvidas as oito inteligências múltiplas de Gardner (1995), pois elas enfatizam que as pessoas não aprendem da mesma maneira, pois possuem histórias, habilidades e interesses diferentes. Desenvolvendo estas inteligências, os alunos são capazes, também, de se autodescobrirem. Portanto, em cada projeto são estimuladas as inteligências linguística, matemática, espacial, corporal, musical, intrapessoal, interpessoal e naturalista, considerando que “todas as inteligências têm igual direito à prioridade” (GARDNER, 1994, p. 15), ou seja, “Não deveríamos pensar nas inteligências como envolvidas numa situação de soma zero, nem deveríamos tratar da teoria das inteligências múltiplas como um modelo hidráulico, onde um aumento em uma inteligência necessariamente impõe o decréscimo em outra”. (GARDNER, 1994, p.278).

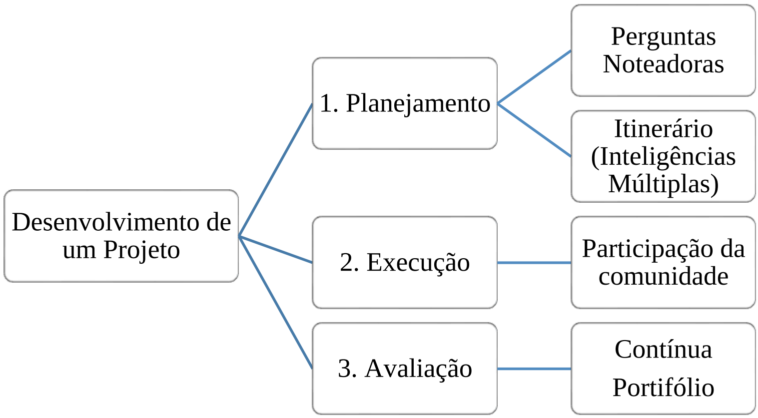
De maneira sucinta, são três fases que compõem um projeto. Na primeira fase, os alunos preenchem a ficha *Perguntas Norteadoras* e elaboram o *Itinerário Proposto* baseado nas inteligências múltiplas. É a etapa do planejamento. A segunda fase do projeto é a de execução. Nesta, a escola se abre para comunidade e vice-versa, pois as pesquisas fazem com que os “muros da escola se rompam”, proporcionando aprendizagens significativas e o envolvimento da cidade como cidade educadora. A terceira fase é a

[7] Os alunos não precisam necessariamente estarem todos no mesmo ano para formarem um grupo de projeto. Em alguns casos, o tema escolhido pode contemplar o interesse de alunos de anos diferentes.

de avaliação. É o momento de culminância para que todos possam compartilhar e registrar o que aprenderam em um portfólio.

Na figura 6.1, apresentamos as principais etapas que caracterizam o processo pedagógico de desenvolvimento de um projeto na Escola Maria Peregrina.

Figura 6.1: Etapas do desenvolvimento de um projeto na Escola



Fonte: Elaboração própria

Nesse cenário, corroborando com Moretto (2001), a avaliação da aprendizagem precisa ser coerente com a maneira de ensinar, por este motivo, todo processo da pesquisa é avaliado de modo contínuo e formativo,

> Observamos que a avaliação formativa não é estática, ela é um processo cíclico e contínuo de análise e ação [...] Defrontados com o mesmo ensino, os alunos não progridem no mesmo ritmo e da mesma maneira. Caso se aplique uma avaliação formativa, cedo ou tarde um fato se evidenciará: nenhum ajuste global corresponde à medida da diversidade das necessidades. A única resposta adequada, portanto, é a de diferenciar o ensino. (CASEIRO; GEBRAN, 2008, p. 4).

Na Escola Maria Peregrina as aprendizagens acontecem de forma prática e, também teórica, pois cada projeto traz situações de aprendizagens desafiadoras para docentes e discentes. Apesar da organização da escola ser estruturada em anos letivos, "a vida escolar e o currículo – são assumidos e trabalhados em dimensões de tempo mais flexíveis. Prevalecendo, assim, uma postura pedagógica e didática em que o ritmo e a singularidade de cada aluno dinamizam toda estrutura escolar" (www.escolamariaperegrina.com.br/escola-projeto-pedagogico) como citado anteriormente. Isso requer um movimento constante de ir e vir em relação aos conteúdos e nesse movimento é bem provável que haja alteração no planejamento do projeto.

Com intuito de materializar as fases que compõem um projeto mencionadas acima, segue o relato de um projeto realizado por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. No Itinerário Proposto está somente o registro da inteligência tratada neste capítulo, a lógico-matemática.

O Projeto Construção

Em 2016, os onze alunos que formavam a turma do primeiro ano do Ensino Fundamental da Escola Maria Peregrina decidiram desenvolver um projeto cuja temática de investigação foi intitulada *Construção*. Uma das principais motivações para a realização de uma pesquisa sobre esse tema foi o fato da Escola estar passando por uma reforma, a qual visava a ampliação de um dos prédios para estruturação do Ensino Médio. Identificamos e destacamos, nesse sentido, o fato do tema a ser pesquisado pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio do desenvolvimento de um Projeto estar diretamente associado a uma situação vivida pela comunidade escolar. Portanto, ideias e conhecimentos produzidos pelos alunos do Projeto Construção tinham significativo potencial em contribuir com uma situação real vivida pela comunidade escolar, seja para solucionar problemas ou indicar possíveis aprimoramentos.

Destacamos que esta característica, ou seja, a reciprocidade entre as temáticas de investigação dos Projetos e as situações ou os problemas reais vividos pela comunidade escolar estão em acordo com a proposta pedagógica da Escola, a qual evidencia que,

> Os primeiros passos a serem dados pelos tutores da Escola Maria Peregrina é a preocupação e motivação em introduzir o aluno em uma verdadeira atitude de indagação, com perguntas a respeito de um verdadeiro problema aos seus olhos. Os alunos são orientados a buscar respostas para essas perguntas em várias fontes e a partir de sua própria iniciativa e depois são encaminhados para a articulação dessas respostas em torno do problema inicial (mariaperegrina.org.br/escola/, 2017, s.n.).

Após decidirem coletivamente o tema a ser pesquisado no início do ano letivo, os alunos realizaram o planejamento. Primeiramente, considerando o papel mediador da tutora, os alunos responderam às *perguntas norteadoras*, as quais apresentamos no Quadro 6.1.

Quadro 6.1: Ficha das Perguntas Norteadoras do Projeto Construção

1. O QUE QUEREMOS DESCOBRIR?

- *O que é cimento?*
- *O cimento é duro ou mole?*
- *Por que o prédio precisa de um apoio?*
- *Há possibilidade de fazer uma extensão de energia da casa na árvore para outras casas?*
- *Como é feita a instalação elétrica nas casas?*
- *O tijolo é forte?*
- *É possível fazer casas de ferro?*

2. POR QUE QUEREMOS DESCOBRIR?

- *Porque estou pensando ser pedreiro.*
- *Quero construir uma casa.*
- *Porque gostamos do assunto.*
- *Porque quero fazer uma casa para morar.*
- *Porque gosto de construir.*
- *Porque é possível fazer um monte de coisas.*
- *Porque quero construir.*

3. O QUE JÁ SABEMOS?

- *O cimento é de concreto.*
- *O cimento é mole e depois fica duro.*

• *O prédio precisa de apoio porque é grande e pode cair.* • *Não há possibilidade de fazer extensão de energia da casa na árvore com as casas.* • *A instalação na casa é feita com tomada.* • *O tijolo é fraco, ele quebra.* • *Tem como fazer casa de ferro.* • *Precisa de cimento e tijolo para construir casa.* • *O pedreiro e o construtor fazem as casas.* • *Precisa de madeira e prego para fazer a casa na árvore.*

Fonte: Escola Maria Peregrina

Após elaborar o registro referente as perguntas norteadoras, o qual significativamente diz respeito a conhecimentos prévios dos alunos, a tutora do Projeto Construção elaborou o *itinerário proposto*[8] baseado nas oito Inteligências Múltiplas (GARDNER, 1994). Visando uma contextualização ao leitor apresentamos no Quadro 6.2 aspectos acerca da inteligência lógico-matemática. No entanto, o leitor deve considerar o caráter interdisciplinar desse contexto, pois outros tipos de inteligências como linguística, espacial, naturalista, intrapessoal e interpessoal também foram desenvolvidas no processo pedagógico, sendo parte efetiva do itinerário elaborado.

Quadro 6.2: Itinerário Proposto da Inteligência logico-matemática do Projeto Construção

INTELIGÊNCIA LÓGICO-MATEMÁTICA
• Os construtores, para construírem, precisam saber sobre **direção: a frente, atrás, em cima, embaixo, ao lado, perto e longe.** Vamos fazer uma brincadeira de **direção** na escola? • Construa uma casa usando **formas geométricas.** • Construa sua casa utilizando os **sólidos geométricos.** Use as **unidades de medidas** para que sua casa fique bem estruturada. • Conte quantas salas de aula estão sendo construídas na nova construção da escola Maria Peregrina. (**Números de 0 a 10**).

[8] Nos projetos dos anos finais do Ensino Fundamental, os alunos participam da elaboração o Itinerário Proposto junto aos tutores e professores especialistas (professores responsáveis pelas disciplinas em cada Inteligência).

- Faça uma listagem de materiais que precisaremos para construir uma casa de mini tijolos. Depois enumere esta lista em **ordem crescente.** Use seus conhecimentos sobre **medidas de massa e de capacidade e proporção** para a preparação da mini casa de tijolos.
- Elabore um concurso: *"Minha melhor casa"*. Faça o cartaz de propaganda do dia e local do concurso. Depois, para a premiação, use os seus conhecimentos sobre **números e números ordinais.**
- Faça uma **maquete/croqui** de uma casa.

Fonte: Escola Maria Peregrina

A seguir, apresentamos uma descrição sobre como as atividades propostas no Itinerário foram realizadas nesse Projeto e a maneira como ocorreu a inserção dos conteúdos curriculares na prática.

- **Noções Espaciais:** Os alunos fizeram brincadeiras para aprenderem as noções de direção: frente, atrás, em cima, embaixo, ao lado, perto e longe. Isso porque todo construtor precisa destas noções básicas.
- **Formas Geométricas:** estudaram as formas geométricas desenhando suas casas. Nomeando cada uma depois do desenho pronto (triângulo, quadrado, retângulo e círculo).
- **Sólidos Geométricos e Unidades de Medida:** Após o conhecimento sobre as formas geométricas, os alunos construíram com papelão casas usando os conhecimentos sobre sólidos geométricos (cubos, pirâmides, prismas, cilindros e esferas). Esse processo criativo envolveu unidades de medida. Buscaram outras ideias para construção de sólidos geométricos usando materiais recicláveis.
- **Números:** No momento da execução deste projeto, a Escola Maria Peregrina passava por uma reforma/ampliação para o acolhimento e implementação do Ensino Médio. Assim, os alunos exploraram a noção de número natural contando as salas de aula que estavam sendo construídas na escola. Enumeraram quantas haviam antes da construção e quantas salas aumentariam.

Concurso "Minha Melhor Casa"

No desenvolvimento do Projeto, foi criado um concurso no qual os participantes deveriam construir uma casa (maquete/croqui). Para divulgação do concurso, os estudantes elaboraram o cartaz de propaganda usando os conhecimentos referentes a Espaço e Forma (ver Figura 6.2). Os materiais utilizados para esta situação de aprendizagem foram cartolina, tesoura, cola, régua e lápis de cor. Além disso, organizaram toda a estrutura para o concurso desenvolvendo os conceitos de localização e movimentação no espaço: organizaram a sala dividindo os espaços que os participantes do concurso usariam. Elaboraram critérios para participação do concurso: limpar o que sujou; fazer a casa individualmente ou em dupla; usar devidamente os materiais da escola sem desperdício; usar materiais recicláveis. Ao final, para a premiação e classificação dos participantes, usaram conhecimentos sobre números naturais e números ordinais.

Figura 6.2: Participantes do concurso construindo suas casas utilizando materiais recicláveis.

Fonte: Escola Maria Peregrina

Ao acompanhar as etapas de elaboração e desenvolvimento do projeto é possível identificar o desenvolvimento de conteúdos e habilidades presentes em documentos curriculares. O EMAI (SÃO PAULO, 2014), por exemplo, destaca que,

> De fato, o aluno dá significado às coisas a partir daquilo que sabe, de toda a sua experiência anterior e, não necessariamente, a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas. A aprendizagem requer o envolvimento das crianças em atividades significativas. As explicações do professor, em um momento adequado e de uma forma apropriada, são certamente elementos fundamentais. Convém ressaltar que, não adianta ensinar conteúdos novos de modo expositivo se as crianças não tiveram oportunidades de viver experiências concretas sobre as quais essas explicações podem fazer sentido. (SÃO PAULO, 2014, p.9).

Conforme descrito anteriormente, nessa fase de execução do projeto, a escola abre as portas à comunidade e a interação que acontece proporciona um enriquecimento muito grande aos projetos. E nesse caso não foi diferente, os alunos planejaram e montaram a planta de uma casa. Com o auxílio de um construtor voluntário, elaboraram uma mini casa. Desenvolveram desde a coordenação motora fina às noções de espacialidade. Tiveram que calcular quantidade de materiais necessários para esta construção, utilizando noções e/ou cálculos por meio das operações básicas (adição e subtração).

Os alunos pesquisaram com o construtor quais os materiais seriam usados para construir acasa de mini tijolos. Depois enumeraram esta lista em ordem crescente: (1) Forma metálica; (2) Areia; e (3) Cimento.

Descobriram ainda que precisariam de uma proporção de três partes de areia para uma parte de cimento, ou seja, tiveram a oportunidade de explorações questões relacionadas aos números racionais. Usaram para a construção da casa os seguintes materiais, aprendendo as medidas de massa e capacidade e literalmente, colocaram a mão na massa.

- 12 kg de areia;
- 4 kg de cimento;
- Água (o suficiente para dar o ponto).

A base da construção foi planejada e calculada. O construtor orientou os alunos em quantos mini tijolos a base da casa deveria ter. Utilizaram os conhecimentos de unidades de medida para deixar os espaços da casa padronizados e bem divididos. Com uma trena mediram estes espaços. Utilizaram conhecimentos de medidas de tempo (minutos e horas) e fizeram planejamento para não perder o cimento preparado para a construção. Alguns conteúdos como sequência numérica, semanas e meses (calendário), foram trabalhados e desenvolvidos diariamente por meio do planejamento desta pesquisa. Outro conteúdo desenvolvido ao longo do projeto foi a leitura e escrita das horas, pois no momento de escrita da rotina diária aprenderam a ver e registrar as horas.

Avaliação

A última fase do projeto – a avaliação – embora colocada como terceira etapa, perpassa toda a trajetória da pesquisa para ir ao encontro da proposta metodológica da escola de avaliação formativa. Nesse momento, o olhar atento do tutor para as situações avaliativas é um diferencial e também totalmente necessário para que a intersecção entre pratica e teoria se concretize.

> A avaliação é desse modo colocada como um processo de comparação entre o desejado e o realizado, confrontando-se o que se propõe nos objetivos com o que se foi capaz de realizar. Supõe certamente um juízo que o professor emite sobre a globalidade do trabalho de um aluno, durante um período determinado de tempo e o ajuda a tomar decisões sobre como prosseguir e planejar os próximos passos.

> Embora haja um razoável consenso quanto a essa forma de interpretar a avaliação, na prática persistem dificuldades de avaliar os alunos na medida em que o que se faz com frequência é "examiná-los" por meio de critérios e instrumentos nem sempre compatíveis com o que se tem como objetivos de aprendizagem. Em decorrência, faz-se uma avaliação que empobrece o valor do conhecimento conduzindo o professor apenas a medir alguns aspectos do conhecimento matemático de seus alunos, pouco sabendo sobre atitudes, sobre seus avanços ou sobre possíveis causas de erros cometidos. (SÃO PAULO, 2014, p.41)

As avaliativas, como são chamadas as avaliações propostas na Escola Maria Peregrina, são situações em que os alunos demonstram a aprendizagem do conteúdo de maneira formal ou informal. Se em uma das atividades práticas do projeto o aluno falar sobre o conteúdo com o colega, responder ao questionamento do tutor, dar uma explicação durante o lanche para alguém, pode ser que esteja acontecendo uma situação de avaliativa informal e o tutor pode fazer o relato sobre o fato. Por este motivo, em algumas reportagens onde a escola aparece é comum dizerem que nessa escola não tem prova, pelo contrário, os alunos são avaliados sempre. Mas caso o aluno decida fazer uma avaliação oral ou escrita, uma música, um teatro, uma poesia sobre o conteúdo aprendido, isso também é considerado como avaliativa (formal),

> Além disso, a auto avaliação, é um aspecto fundamental na EMP, uma vez que o ponto de vista do estudante contribui significativamente para a avaliação docente das práticas formativas. Ao final de cada projeto, os alunos elaboram um portfólio contendo registros das pesquisas, anotações, descobertas, avaliativas, atividades, comentários de tutores/professores, dentre outros registros considerados relevantes para a realização do projeto e avaliação do estudante. O portfólio pode ser considerado a “conclusão avaliativa” do estudante na EMP, pois trata-se de um documento que compila globalmente o trabalho realizado ao longo do semestre ou do ano, dependendo da duração do projeto desenvolvido (SCUCUGLIA; RODRIGUES, 2015, p. 2-3).

Diante de tal complexidade, os registros dos tutores são imprescindíveis, afinal, ao longo do dia são várias as situações que merecem destaque. Isso pode ser feito como anotações no caderno que funciona como diário de classe. O desenvolvimento dos alunos, as dúvidas, o comportamento, as falas que podem ser avaliativas, as faltas, tudo pode e deve ser anotado nesse caderno.

Com base nas descrições sobre a proposta metodológica da Escola Maria Peregrina é perceptível a importância da formação docente. Tal como é feito com os alunos, a formação de quem forma também é contínua. Quinzenalmente acontecem esses momentos privilegiados de formação entre tutoras dos anos iniciais do ensino fundamental e professora especialista da inteligência logico-matemática dos anos finais. Os temas das formações são variados e flexíveis, vão desde dúvidas conceituais até questões de planejamento curricular. É uma maneira de partilhar as experiências, pontuar o que foi positivo e buscar instrumentos para corrigir o que não está dando certo. Deste modo, é possível estabelecer conexões entre os anos iniciais e finais no intuito de minimizar a ruptura que pode acontecer quando os alunos passam do quinto ao sexto ano, ou seja, evitar o impacto negativo que isso pode ocasionar na aprendizagem e acompanhar o processo longitudinalmente,

> A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores (BRASIL, 2016, p.232).

Comentário Finais

Neste capítulo apresentamos alguns dos aspectos emergentes na Escola Maria Peregrina em termos de aprendizagem, conteúdos curriculares e avaliação no que diz respeito a Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O Projeto Construção foi escolhido como exemplo para discussão pelo fato de conseguir contemplar diversos conteúdos de primeiro ano propostos pelo currículo (SÃO PAULO, 2014), o que não é tão comum de acontecer, aliás, um dos aspectos mais trabalhosos da Pedagogia de Projetos é a inserção dos conteúdos matemáticos nos projetos de modo que exista uma relação significativa entre projeto e conteúdo. Assim, a dificuldade ou inquietação faz com que o professor saia de sua zona de conforto, pesquise novas possibilidades e aprenda junto com seus alunos.

Um aspecto interessante e que o leitor deve estar questionando seria como encaixar a matemática em projetos que não são voltados para essa área? De fato, existem projetos que possuem foco em outras inteligências como por exemplo o Projeto Corpo Humano, que aconteceu concomitante ao projeto Construtores. Apesar da Inteligência Naturalista ser o foco, foi possível inserir a inteligência lógico-matemática nas atividades práticas do projeto. Os dados levantados na pesquisa de campo realizada pelos alunos sobre qual era o maior órgão do corpo humano foram apresentados em forma de tabela e gráfico. Ainda na mesma pesquisa foi possível trabalhar as unidades de medida, fração e operações básicas no dia em que realizaram um piquenique com alimentos saudáveis. Deste modo, o conteúdo que parece ser característico de uma outra área serve como elo de ligação para os conteúdos "extra projeto" que precisam ser aprendidos.

Convidamos os leitores a conhecerem a Escola Maria Peregrina por meio do nosso website (mariaperegrina.org.br/escola/) e também agendando uma visita presencial a nossa unidade.

Referencias

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1997. 148 p.

BRASIL, Ministério Da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2016.

CASEIRO, C.C.F.; GEBRAN, R.A., Avaliação Formativa: Concepção, Práticas E Dificuldades. In: *Nuances: estudos sobre Educação*. Presidente Prudente, SP, ano XIV, v. 15, n. 16, p. 141-161, jan./dez. 2008

DEWEY, J. *Vida e Educação.* 6ªed. São Paulo: Melhoramentos, 1967.

DEWEY, J. *Democracia e Educação.* 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

GARDNER, H. *Estruturas da mente:* a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artes Médicas,1994.

GARDNER, H**.** *Inteligências Múltiplas:* a teoria na prática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

MORETTO, V. P. Avaliar com eficácia e eficiência. In: MORETTO, V. P. *Prova:* um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. Rio de Janeiro: DP&A. 2001, p. 93 – 122.

SÃO PAULO. *Orientações Curriculares do Estado de São Paulo:* Anos Iniciais do Ensino Fundamenta - Matemática. EMAI. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação, 2014.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SBEM. *GT 01. Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Disponível em < http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt01-matematica-na-educacao-infantil-e-nos-anos-iniciais-do-ensino-fundamental >. Acesso em 12 de novembro de 2017.

SCUCUGLIA, R. R. S.; RODRIGUES, A. F. B. A Produção de Performances Matemáticas Digitais nos Anos Iniciais do Ensino. In: *Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,* 2015. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação matemática (SBEM), 2015. v. 1. p. 1-13.

Capítulo sete

Educação matemática inclusiva: um destaque para os materiais manipuláveis

Lessandra Marcelly Sousa da Silva[1]
Miriam Godoy Penteado[2]

Introdução

Neste texto defendemos uma proposta de educação matemática que considere a diversidade de condições em que se encontram os alunos que precisam frequentar a escola. Nossa perspectiva é a da educação inclusiva e os exemplos apresentados relacionam-se ao caso de pessoas cegas.

Discutir esse assunto é colocar em pauta a qualidade de ensino para todos os estudantes matriculados na escola, respeitando e reconhecendo suas diversidades. Como atestam Oliveira e Profeta (2008), é responder a todos de acordo com suas potencialidades e necessidades. Desta forma, somente podemos considerar uma escola como inclusiva se organizada para favorecer a aprendizagem de todos os alunos, sejam cegos, surdos, pobres, ricos, mulheres, homens ou em qualquer outra condição.

Para Mantoan (2001), escolas inclusivas são aquelas em que as pessoas são respeitadas e reconhecidas nas suas diferenças. Em

---

[1] É Doutora e mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo; e licenciada em Matemática pela Universidade do Estado do Pará. Deve ser citado Marcelly, L; isto é, MARCELLY (2018).

[2] Professora voluntária no Departamento de Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp) Câmpus de Rio Claro, onde atua como professora e orientadora no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, e em atividades de extensão.

que todos os alunos possam estudar juntos no ensino regular. Os documentos legais garantem o acesso de todos os estudantes independente de suas especificidades no ensino regular, porém, isso não garante a nenhum deles a qualidade do ensino, nem a permanência e, muito menos o sucesso destes estudantes na vida escolar. Utilizando o argumento de Rodrigues et al. (2014), uma escola inclusiva não se limita a receber todos os alunos. É preciso que tenha condições de enriquecer o processo educacional, reconhecendo a importância do desenvolvimento das potencialidades, saberes, atitudes e competências de todos.

Neste texto vamos nos referir a escola inclusiva como sendo a escola regular que recebe estudantes público alvo da educação especial[3] conforme previsto na Constituição de 1988 (BRASIL, 1988). Os seus artigos 206 e 208, respectivamente, tratam da igualdade de condições de acesso e permanência com oferta de atendimento educacional especializado na rede regular de ensino.

Para garantir a qualidade da escolarização desses estudantes na escola regular, faz-se necessária a participação da Educação Especial como área de conhecimento. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN 9.394/96, estabeleceu a Educação Especial como modalidade de educação escolar transversal a todos os níveis de ensino (BRASIL, 1996). É na Educação Especial que estão os conhecimentos sobre o ensino e aprendizagem de pessoas com deficiência, com transtornos ou com altas habilidades. Esse conhecimento especializado se faz presente na escola pelos profissionais formados em Educação Especial que atuam em colaboração com os professores.

Mas, uma educação inclusiva não deve ser responsabilidade somente desses profissionais. Conforme mencionado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), toda comunidade escolar deve estar comprometida em atender a

[3] Alunos com surdez, deficiência física ou intelectual, cegueira, baixa visão, surdocegueira, transtornos globais do desenvolvimento, altas habilidades e superdotação.

diversidade de seus alunos. Assim sendo, as recomendações são para planejar o ensino a partir dos interesses e condições dos alunos.

Outro dispositivo legal, a Resolução CNE/CEB nº 2, de 11 de fevereiro de 2001 (BRASIL, 2001), no seu artigo 2º, determina que os sistemas de ensino matriculem todos os alunos na escola regular independente de suas condições físicas ou sensoriais.

Do ponto de vista legal, no Brasil, a educação inclusiva está muito bem amparada. Resumidamente, temos o apoio legal da Constituição da República Federativa do Brasil/1988, especialmente no inciso III do Art.º 208; do Estatuto da Criança e do Adolescente - ECA, de 1990; e da Lei nº 8.069/90, atualizada com a Lei nº 12.010, de 2009 (BRASIL, 2009), que determina o direito das crianças com deficiência à educação nas escolas regulares. Entretanto, a prática tem mostrado que o sistema educacional deixa a desejar no que diz respeito a atendimentos das exigências legais.

Cabe às escolas organizarem-se para o atendimento aos estudantes com necessidades educacionais especiais, assegurando que tenham as condições necessárias para uma educação de qualidade. De acordo com as Estratégias para a Educação de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais (BRASIL, 2003), entre outras coisas, deve-se pensar na qualificação dos professores para que possam atender essa nova demanda.

Dentro desta perspectiva, Capellini e Rodrigues (2009) realizaram uma pesquisa com 423 professores sobre as dificuldades encontradas na prática no que tange a educação inclusiva. O resultado aponta que a maioria desses professores reclamou da ausência de assistência técnica, da falta de apoio para formação continuada e do número excessivo de alunos matriculados por classes.

As autoras concluem que o sistema escolar não está preparado para receber alunos com deficiência na escola regular e é preciso mais investimento na formação do professor. Silva e Pinto (2010) argumentam na mesma direção, afirmando que as escolas não possuem infraestruturas e nem materiais adequados para que os estudantes ampliem e desenvolvam suas competências e habilidades.

É necessário que os professores tenham condições para lidar com a diversidade, compreender as diferenças e apreciar as potencialidades de cada estudante, de modo a favorecer o ensino e a aprendizagem. A inexistência dessas condições denota o que Pimentel (2012, p.140) chama de "fenômeno da pseudoinclusão, ou seja, apenas da figuração do estudante com deficiência na escola regular, sem que o mesmo esteja devidamente incluído no processo de aprender". Nesse caso, os estudantes só estariam matriculados e frequentando a classe regular, o que não significa que estariam envolvidos com o processo de ensino e de aprendizagem da turma.

Pelosi (2006) apresenta a ideia de que para se concretizar o projeto de escola inclusiva é preciso ter planejamento de gestão responsável, abarcando a formação dos educadores envolvidos com os alunos. Sendo assim, é preciso condições para planejar aulas com metodologias e recursos didáticos apropriados tendo em vista a diversidade dos estudantes.

Considerando tais preocupações, segue uma discussão sobre os desafios de se contemplar estudantes com deficiência em aulas de matemática em uma escola regular. Primeiramente, escrevemos a respeito do ensino da matemática para pessoas cegas para então apresentarmos o uso de materiais manipuláveis a partir do caso de uma professora da educação básica de uma escola pública.

O ensino da matemática para estudantes cegos

Tradicionalmente o ensino de matemática ocorre no formato de aulas expositivas em que o professor escreve na lousa e fala para a classe apontando para o que escreveu. Esse formato impossibilita que um aluno cego acompanhe a explicação, o que nos leva a considerar outras formas de se apresentar o conteúdo. A possibilidade que destacamos aqui é o uso de materiais manipuláveis para usufruir da boa capacidade da pessoa cega em ler informações a partir do tato.

Muito se tem discutido a respeito da importância dos materiais manipuláveis no ensino da matemática. Lorenzato (2010; 2012), que fez um estudo sobre os pensadores do século XVII até o século XX, mostrou o quanto tem sido importante a utilização dos materiais concretos para o ensino e a aprendizagem. Seus argumentos, entre outros, é que palavras não conseguem fazer o que os objetos manipuláveis são capazes. Observar, tocar, ver através das mãos faz parte da natureza humana, pois, “as pessoas precisam *pegar para ver* (...). Então, não começar o ensino pelo concreto é ir contra a natureza humana. Quem sabe ensinar sabe disso” (LORENZATO, 2010, p. 19).

Reily (2004) reforça o argumento de Lorenzato (2010) afirmando que quando estamos “diante de um objeto que nos interessa, antes de pensar, estendemos a mão para tocá-lo. (...), parece que o impulso de conhecer com as mãos sempre será mais forte do que apreender pelo olhar” (REILY, 2004, p. 49). Ou seja, somos levados pela necessidade de tocar nas coisas com as mãos para sentir a textura, plasticidade, tamanho ou peso do objeto.

A mesma conclusão havia sido feita por Vygotsky (1991) durante um dos seus experimentos utilizando materiais manipuláveis para entender as fases evolutivas do ser humano. Após utilizar 22 blocos de tamanho e cores sortidas para seu teste concluiu que o raciocínio do sujeito estava diretamente relacionado com a manipulação dos blocos utilizados no experimento.

Mendes (2009) aponta para os materiais como sendo uma possibilidade para um maior envolvimento do estudante. Estes materiais podem ser desde uma peça de jogo de dama, bolas de isopor ou qualquer objeto que se possa manipular. O importante é servirem de mediadores entre o professor e o estudante no momento da construção do saber. Para Passos (2012), os recursos didáticos devem ser utilizados como suporte na organização do ensino e da aprendizagem dos estudantes.

De acordo com Reily (2004), uma das preocupações dos professores de estudantes cegos é como tornar acessível a informação na medida em que eles avançam nas séries escolares. A autora chama atenção para a dificuldade que é arquivar informações numéricas na memória e realizar cálculos mentais sem utilizar anotações no papel. De fato, muitos alunos cegos sentem-se prejudicados para acompanhar a disciplina de matemática quando ela é ministrada somente com o uso de lousa e giz.

Os pesquisadores da área de educação matemática preocupados com a inclusão, vêm mostrando aspectos positivos sobre a criação de materiais manipuláveis junto com estudantes cegos e sua utilização em situações de ensino e de aprendizagem.

Fernandes e Healy (2007) afirmam que através dos materiais manipuláveis é possível ensinar matemática aos estudantes cegos, pois, eles captam e processam informações, preferencialmente, através do tato e da audição. Assim sendo, com essa oportunidade, eles se mostram muito capazes de aprender matemática.

Vianna et al. (2007) em pesquisas utilizando materiais feitos de dobraduras para o ensino de simetria concluíram que os mesmos facilitam a compreensão dos conteúdos ensinados. Para as autoras, as dificuldades dos estudantes cegos parecem ser as mesmas dos estudantes que enxergam, ou seja, o uso de materiais manipuláveis se mostrou fundamental para o ensino e a aprendizagem de todos os estudantes.

Com isso, concluímos que as potencialidades dos estudantes cegos devem ser reconhecidas e exploradas para que ocorra o aprendizado. Porém, temos que buscar outros mecanismos para disponibilizar informação que não solicitem o uso dos olhos. Os materiais manipuláveis, por favorecem o tato, podem se constituir em um recurso metodológico que minimize os obstáculos impostos pela falta de visão. Ou seja, permitem que o estudante tenha acesso a outras formas de representação das ideias matemáticas.

Defendemos o uso de materiais para o ensino da matemática porque através deles podemos representar os conteúdos envolvendo cálculo, medida, criação de fórmulas, construção e interpretação de gráficos, entre outros. Todavia, não estamos afirmando que o uso dos materiais manipuláveis resolverá todas as dificuldades encontradas no ensino para pessoas cegas, ou, que utilizar materiais manipuláveis solucionará as dificuldades encontradas para ensinar matemática. É uma possibilidade que não pode ser descartada.

Ao se falar de materiais manipuláveis é preciso pensar em sua produção levando-se em consideração todos os usuários possíveis, ou seja, procurando atender a um maior número de estudantes na sala.

Pensando nessa forma de criação ampliada para todos os tipos de usuários precisamos utilizar recursos de acessibilidade. Daí, por defendermos a ideia de que os materiais manipuláveis devem ser utilizados pelo maior número possível de estudantes, inclusive os cegos, sugerimos a construção destes materiais com recursos da Tecnologia Assistiva numa perspectiva do Desenho Universal.

Desenho Universal e Tecnologia Assistiva

Entendemos o Desenho Universal como uma perspectiva que defende o uso de produto equiparável, igual, ou em mesmo nível para qualquer pessoa. E, a Tecnologia Assistiva, como sendo recursos que podem ser utilizados para favorecer a acessibilidade aos materiais manipuláveis.

O termo Desenho Universal foi criado em 1987, a partir da terminologia *Universal Design*, pelo arquiteto americano Ron Mace que defendia que na criação de um objeto ou um ambiente, deveria ser considerada a necessidade de serem utilizados por qualquer pessoa. Conforme os estudos de Carletto e Cambiaghi (2008) o pensar para todos de Ron Mace foi mundialmente divulgado e utilizado a partir da década de 1990 por todos os programas de acessibilidade.

Portanto, o Desenho Universal envolve a concepção de espaços, artefatos e produtos procurando atender as necessidades das pessoas independentemente de suas singularidades antropométricas e sensoriais. É uma busca por soluções para os problemas de acessibilidade. (BRASIL, 2004)

Desta forma, procura atender a todos sem a necessidade de adaptação. A meta, por exemplo, dos arquitetos que projetam nesta perspectiva é fazer que todos os ambientes e produtos sejam utilizados e manipulados pelo maior número possível de indivíduos.

Os projetos desenvolvidos na perspectiva do Desenho Universal precisam ser: equiparáveis, flexíveis, de fácil compreensão, confortáveis, com informações claras, seguros e abrangentes. Estes são os princípios básicos que sustentam um projeto construído nesta perspectiva.

Por Tecnologia Assistiva (TA) entendemos como sendo os produtos e recursos que podem potencializar as habilidades funcionais das pessoas com deficiência (BRASIL, 2009).

No campo da Educação a TA oferece serviços, metodologias e recursos que atendem aos alunos com deficiência (BERSCH, 2009). Galvão Filho e Garcia e (2012, p. 55) afirmam que a TA pode ser "qualquer ferramenta ou recurso utilizado com a finalidade de proporcionar uma maior autonomia para uma pessoa com deficiência". Existe uma grande quantidade de recursos simples e de baixo custo que podem ser utilizados. Ela vem se tornando, no meio escolar, um apoio para novos projetos educacionais favorecendo, em especial, os estudantes com deficiência.

No contexto da educação de pessoas cegas, alguns exemplos de TA são: máquinas de escrever braille[4], texturas de borracha, texturas de papel, texturas de madeira, texturas de plástico, software para leitura de tela entre outros recursos táteis e auditivos.

Portanto, Desenho Universal e TA são as perspectivas que utilizamos na construção de materiais manipuláveis para o ensino de matemática. Procuramos contemplar, desde o projeto inicial do

[4] Braille é um código em relevo utilizado para a pessoa cega ler e escrever. Mais detalhes em Marcelly (2010).

material, as diferentes condições dos estudantes da sala, evitando assim a necessidade de adaptações para um aluno cego, por exemplo.

Materiais manipuláveis em ação

Nesta seção vamos relatar a produção de materiais feita pela professora Lessandra, efetiva em uma escola pública estadual do estado de São Paulo, quando se viu diante dos desafios de incluir estudantes cegos em sua aula de matemática.

Lessandra iniciou a carreira no magistério no ano de 2004 e sempre foi bastante entusiasmada em oferecer tarefas diferenciadas para seus alunos.

> Fazia projetos, no contraturno, de xadrez, campeonatos entre os alunos envolvendo conteúdos da matemática, exposições de materiais que eles construíam através de feiras de matemática; fazia para os alunos laboratórios de geometria para o ensino fundamental; levava meus alunos para aulas em supermercados, entre muitos outros trabalhos diferenciados (MARCELLY, 2015, p. 59).

No ano de 2005 ela teve, pela primeira vez, um aluno cego e se sentiu muito abalada por não conseguir preparar suas aulas de forma a favorecer esse aluno. Foi então que começou a estudar. Aprendeu sobre o código braille e atuou como voluntária em instituição que atendia pessoas cegas.

> Foi nesta ocasião que obtive informações valiosas que me levaram a refletir cada vez mais sobre os materiais manipuláveis e como eles poderiam ser úteis nas aulas em que houvesse estudantes cegos, se fossem utilizados como um meio de representar ideias matemáticas, assim como era feito para os estudantes que enxergavam. Porém, permitir aos estudantes cegos ver os materiais, que, até então, eram visuais, tornou-se um novo desafio.

> Fui buscar respostas na literatura e em pesquisas sobre o tema materiais concretos (MARCELLY, 2015, p. 62).

No que segue, apresentamos algumas situações de uso de materiais vivenciadas pela professora Lessandra.

Operações com números inteiros

O material utilizado nessa situação foi feito de improviso diante da dificuldade de explicar as operações com números negativos.

> Fui até a cozinha da instituição e peguei um punhado de feijão cru e um pedaço de papel-alumínio. Recortei o papel-alumínio em pequenos pedaços e embrulhei alguns dos grãos de feijão. Dei os dois grupos de feijões para ela sentir com o tato a diferença entre eles. Recebi ajuda de Delta para embrulhar os grãos de feijão. (MARCELLY, 2015, p. 98)

A Figura 7.1 ilustra essa situação.

Figura 7.1: Feijão e papel alumínio

Fonte: Marcelly (2015, p. 98)

A maneira de utilizar o material com os estudantes foi simples. Após o material pronto, a professora sugeriu para considerarem os feijões embrulhados como sendo os representantes dos números inteiros negativos e, os outros como sendo os positivos.

A partir de então, misturou todos, conforme a Figura 7.2, pedindo que fizessem pares com os grãos (positivo e negativo). O exemplo aqui é da operação -14+13.

Figura 7.2: separar os grupos e fazer pares

Fonte: Marcelly (2015, p. 100)

Os alunos perceberam que sobrou um grão embrulhado, ou seja, -14+13= -1 ou um negativo.

Este material foi criado com a ajuda de uma estudante cega e um estudante com síndrome de down. É válido afirmar que no momento de sua construção/utilização ele foi essencial para que ambos pudessem estudar o mesmo conteúdo.

De acordo com a pesquisa de Marcelly (2015) os estudantes após utilizarem o material, fizeram corretamente atividades envolvendo operações com números inteiros. Algo notável, já que antes de trabalhar operações sem os grãos eles nem ao menos tentavam já que tinham receio de errar. A manipulação dos grãos pelos estudantes foi fundamental no momento da explicação da professora e, os auxiliou no entendimento do que ela queria ensinar.

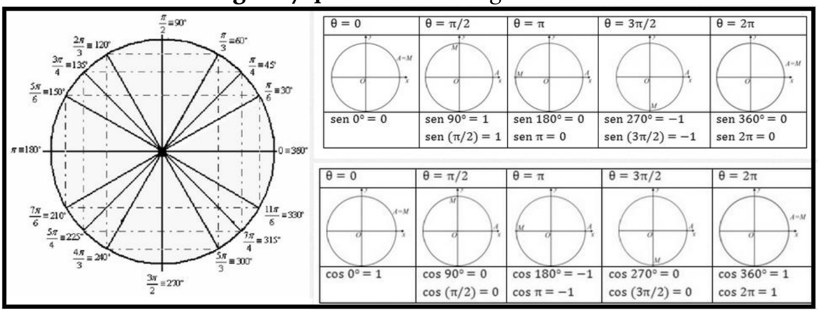
Trigonometria

O material ilustrado na Figura 7.3 foi construído para o ensino de trigonometria utilizando um pedaço de madeira e um transferidor. Os eixos são formados com pedaços de madeiras demarcados com números e relevos e, o transferidor com marcas destacadas nos ângulos para ser acessível a pessoa cega. Serve para representar um ciclo trigonométrico, com uma vantagem, a representação do raio é móvel (giratória). Com esse material é possível trabalhar o conteúdo de trigonometria conforme consta na Figura 7.4.

Figura 7.3: Material manipulável - círculo trigonométrico

Fonte: Marcelly (2015, p. 117)

Figura 7.4: conteúdo de trigonometria



Fonte: Marcelly (2015, p. 117)

As Figuras 7.5, 7.6 e 7.7 ilustram o material sendo utilizado. O estudante cego pode sentir, através das pontas dos dedos das mãos, os eixos para a função seno e para o cosseno, bem como os valores dos ângulos.

Figura 7.5: representação de y=sen30

Fonte: Marcelly (2015, p. 120)

Figura 7.6: representação de y = cos 30º

Fonte: Marcelly (2015, p.120)

Figura 7.7: representação de y = sen 45º

Fonte: Marcelly (2015, p. 121)

Segue um trecho de uma conversa na sala de aula em que a professora utilizou esse material e teve a participação do estudante cego Épsilon.

> Professora: Então vamos conversar para você conseguir identificar onde estão os ângulos e onde estarão as respostas. Vou lhe mostrar [conduzindo a mão do estudante]. Isso aqui [tocando na madeira] são os eixos e no meio deles tem um transferidor. Isso [tocando o ferro] vai girar, sente aqui. Isso aqui [tocando a madeira] são os

> eixos, este, o eixo vertical, é do seno, e este eixo horizontal do cosseno.
> Épsilon: Estou percebendo.
> Professora: Está vendo aqui, tem um eixo aqui, aqui, aqui e aqui. Tem ângulos aqui [tocando o transferidor].
> Épsilon: Sim, dá para sentir tudo. Até o transferidor.
> Professora: Esse pedaço de ferro aqui vai apontar para os valores de ângulos que queremos e o outro vai apontar para os eixos de madeira. Esse aqui é trinta. Veja [colocando um dos ferros no transferidor] aqui 30º. Sentiu? Quando eu apontar com este [tocando o outro pedaço de ferro] para este eixo [tocando o eixo vertical de madeira], terei o seno de 30º. Veja aqui na marca, quanto deu?
> Épsilon: Aqui?
> Professora: Sim.
> Épsilon: Um, dois.
> Professora: Não, lembra? Cada um vale 0,1.
> Épsilon: Ah, tá, 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 - 0,5. Deu meio.
> Professora: Logo, o seno de 30º é meio (Figura 60).
> Épsilon: Que bacana, faz outro.
> (MARCELLY, 2015, p. 119)

Segundo Lessandra, os alunos manuseavam o material e discutiam com os colegas favorecendo assim um entendimento mais rápido do assunto. O aluno cego, Épsilon, fazia um movimento com as mãos como se estivesse desenhando, na sua mente, um eixo parecido com o do material na mesa. Ele dizia, segundo Marcelly (2015, p.124), que “primeiro e segundo quadrantes são positivos, e terceiro e quarto quadrante são negativos. É só pensar nos eixos [sintetizando o sinal de seno de um ângulo]”.

Alguns estudantes ficaram curiosos para conferir se o resultado obtido no material ficava próximo do fornecido por uma calculadora científica e foram incentivados pela professora a fazerem a verificação. Depois disso alguns alunos resolveram fazer materiais similares utilizando CDs, disco vinil e relógio de parede. A Figura 7.8 ilustra algumas dessas construções.

Figura 7.8: construções com bambolê, discos, CDs e relógios de parede

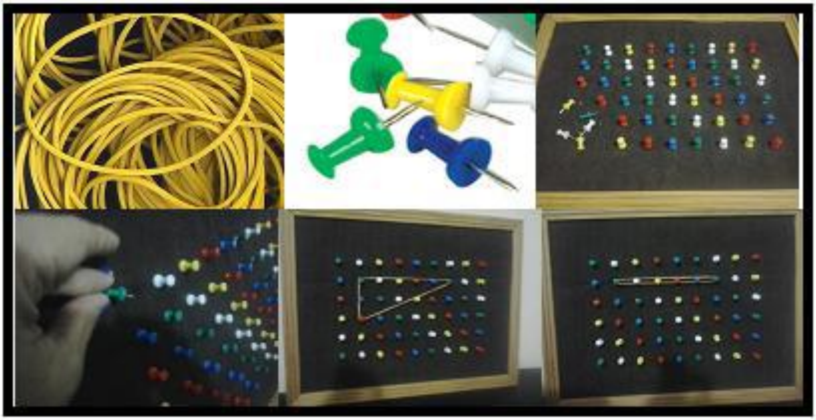
Fonte: arquivo pessoal das autoras

Os materiais manipuláveis descritos acima foram fundamentais para a explicação dos conteúdos de funções trigonométricas pela professora. Sem eles, parecia bem difícil que os estudantes conseguissem ter uma ideia da representação das funções seno e cosseno. Posteriormente, em atividades orais e provas escritas em Braille, Lessandra percebeu que os estudantes sem acuidade visual conseguiram entender o assunto. O aspecto chave dessa abordagem é a disponibilização de informação que pode ser acessada pelo tato.

Geometria

Para as aulas de geometria a professora Lessandra construiu um Geoplano utilizando os seguintes materiais: alfinetes de sinalização, um porta-retrato de madeira (20 cm x 16 cm) e elástico número 18. Os alfinetes foram espetados nas interseções de uma malha quadriculada de 2 cm x 2 cm. Depois de pronto, o material ficou com um formato retangular de 9 alfinetes por 6 alfinetes conforme ilustra a Figura 7.9.

Figura 7.9: Geoplano



Fonte: Marcelly (2015, p.127)

O Geoplano pode ser utilizado para desenhar figuras planas e fazer cálculos de área e perímetro. Porém, chamamos a atenção para o momento de utilizar o Geoplano quando se quer calcular a área das figuras construídas no material. Isso porque, conforme ocorreu em sala de aula, os estudantes podem considerar a quantidade de alfinetes e não o espaço entre os alfinetes como sendo a medida do lado das figuras.

A Figura 7.10 ilustra um aluno cego calculando a área da região quadrada limitada pelo elástico.

Figura 7.10: utilização do geoplano

Fonte: Marcelly (2015, p. 129)

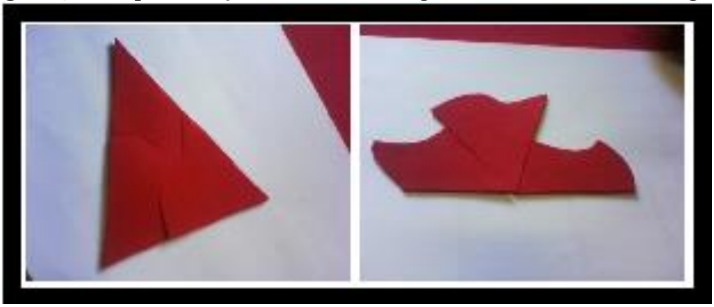
São três alfinetes para compor um lado e a medida de cada lado é dada pela quantidade de espaços entre os alfinetes, ou seja, dois espaços. Neste caso, o quadrado terá lados de medida dois. Porém, o aluno calculou a área considerando a medida três (quantidade de alfinetes) para cada lado. Sobre isso a reflexão da professora Lessandra foi:

> Queria ensinar área, mas errei em deixar que ele achasse que o cálculo de área seria um produto (base x altura) de quantidades de alfinetes. A área seria diferente da quantidade de alfinete das figuras. (MARCELLY, 2015, p. 136).

Numa situação como essa, a professora poderia ter conversado antecipadamente com os estudantes sobre o material para que os mesmos pudessem explorar o significado do espaçamento entre os pinos. De acordo com Marcelly (2015), não foi possível conversar com aquele grupo sobre o erro que havia acontecido pois a professora somente percebeu o equivoco no ano seguinte. Porém, aquela falha não foi mais cometida com outros grupos que utilizaram o material, já que a professora optou por conversar antecipadamente com os estudantes a respeito do Geoplano.

Um outro material foi utilizado pela professora Lessandra para ilustrar a soma de ângulos internos de um triângulo. Para isso ela confeccionou um triângulo em material EVA e o dividiu em três partes solicitando que os estudantes unissem os vértices e montassem uma nova figura com essas partes, conforme ilustra a Figura 7.11.

Figura 7.11: representação da soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Marcelly (2015, p. 117)

A partir disso discutiu com os alunos que qualquer que fosse a configuração do corte, a nova figura sempre representaria um ângulo de 180 graus. Para medir ela usava instrumentos com marcações em relevo como mostram as Figuras 7.12 e 7.13. Ela relata:

> Utilizando contact transparente cobri toda a régua e o transferidor de 180º, depois fiz as marcações com um objeto pontiagudo em cima das marcações de centímetros e dos ângulos de forma que o estudante cego pudesse perceber pelo tato (MARCELLY, 2015, p. 68).

Figura 7.12: Transferidor com marcação em relevo

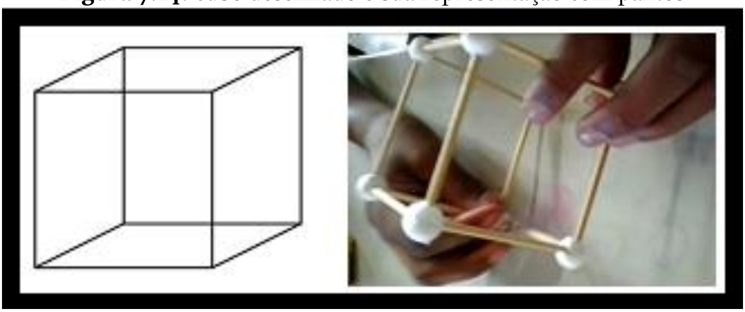
Fonte: Marcelly (2015, p. 68)

Figura 7.13: Régua comum com contact transparente

Fonte: Marcelly (2015, p. 68)

Para a geometria espacial a professora Lessandra utilizou palitos de madeira, ligas de borracha e isopor para construir, com a participação dos estudantes, representações de figuras espaciais. A Figura 7.14 ilustra um cubo.

Figura 7.14: cubo desenhado e sua representação com palitos



Fonte: arquivo pessoal das autoras

Lessandra considera que esse material foi bem útil para um aluno cego com quem trabalhou. Vejamos um trecho de uma conversa dela com o aluno Beta.

> Professora: Esse aqui é o cubo, Beta (Figura 7.15).
> Beta: Oh, louco, nossa!
> Professora: Era essa figura que você não estava conseguindo ver?
> Beta: Nossa!!!
> Professora: Esse aqui foi o cubo que fizemos. Mas você nunca sentiu?
> Beta: Não, nem imaginava isso.

Professora: Mas tem o dado, você nunca pegou num dado?
Beta: Sim, mas não é assim. Que legal, professora!
Professora: Você lembra quando eu falei de vértice?
Beta: Vértice?
Professor: É.
Beta: É isto aqui, né? [tocando as bolinhas]
Professora: Isso mesmo. Quantos vértices tem o cubo?
Beta [manuseando o cubo]: Deixa eu contar: oito.
Professora: Muito bem.
Beta: Fica legal de perceber com este material (MARCELLY, 2015, p. 139).

Figura 7.15: explorando o cubo

Fonte: Marcelly (2015, p. 138)

Professora: Beta, as arestas estão representadas neste material pelos palitos de madeira. Você consegue contar quantas arestas possui um cubo?
Beta [tateando o cubo]: Sim, só espera... Dez?
Professora: Dez? Você tem certeza?
Beta: Espera.
Beta: Aqui, aqui, aqui [contando os palitos de madeira do cubo]. Espera um pouco, são 12.
Professora: Muito bem. E quantas faces?
Beta: Faces?
Professora: Coloca a mão nessa outra figura de papel [levando a mão do aluno a uma figura de papel]. Isso é face. Daí o cubo de madeira ficou vazado a face, mas eu acho que dá para você contar também (Figura 7.16).
Beta: Ah, tá, sim, são seis.
Professora: Muito bem.
Beta: Esse material fica fácil de entender. Eu nunca percebi o cubo antes (MARCELLY, 2015, p. 139).

Figura 7.16: Descobrindo as faces de um cubo

Fonte: Marcelly (2015, p. 138)

Pelo uso das figuras geométricas foi possível dar condições para que todos os estudantes conseguissem "visualizar" os sólidos geométricos. De acordo com Marcelly (2015), os estudantes que utilizaram estes materiais conseguiram compreender as explicações, responder as perguntas orais sobre o conteúdo ensinado e passaram a mostrar mais interesse nos materiais.

Os relatos da professora Lessandra revelam que o uso de material manipulável foi fundamental para que os alunos cegos tivessem acesso ao assunto que estava sendo ensinado. O que trazemos aqui são alguns exemplos, mas é possível usar essa abordagem para grande parte dos conteúdos curriculares. São materiais de baixo custo construídos na perspectiva do Desenho Universal e que podem ser utilizados por todos os alunos sem a necessidade de adaptação.

Considerações finais

Neste texto procuramos destacar a relevância do uso de materiais manipuláveis para a aprendizagem matemática de alunos com deficiência visual. Mas, igualmente importante o são em caso de outras deficiências. Para nós, essa importância se dá pela mediação proporcionada por esses materiais. Incluir feijões para ensinar aritmética, discos para trigonometria e sólidos de madeira para geometria, é uma forma de procurar contemplar as diferenças na sala de aula. Tanto os alunos cegos como os que podem ver, são beneficiados por esse tipo de mediação.

A perspectiva que guia a nossa proposta de produção de material manipulável é a do Desenho Universal com o uso de TA. De acordo com Kranz (2014), são perceptíveis os avanços em relação às práticas pedagógicas direcionadas ao ensino da matemática quando estamos utilizando um material acessível para todos os estudantes, ou seja, construídos nessa perspectiva.

Uma educação inclusiva, conforme defendida pelas políticas públicas, solicita a construção de um novo currículo para a escola regular, novos instrumentos de avaliação e mudança nas atitudes, valores e práticas por parte dos profissionais da educação. Somente incluir alunos cegos nas salas de aula de escolas regulares sem dar a eles nenhuma condição de acesso às informações, não é fazer inclusão. Para que todos os estudantes sejam respeitados em suas diferenças e que a escola possa promover uma educação de qualidade, como defendida por Mantoan (2006), é preciso que se ofereça condições para os professores e demais profissionais da escola.

Que condições seriam essas? Uma base teórica sobre educação especial e educação inclusiva; ampliação do conhecimento conceitual da educação matemática para que se consiga vislumbrar diferentes maneiras de se tratar um determinado conteúdo. E, ainda, é preciso recursos para aquisição de materiais disponíveis no mercado e construção do que ainda não existe.

Um desafio de imensa complexidade que não é para ser enfrentado pelo professor sozinho. Sabemos que grandes mudanças nas condições de trabalho na escola estão longe de ocorrer e o que nos resta é atuar nas brechas que existem no sistema escolar. O caso da professora Lessandra ilustra a importância da imaginação para criar e buscar uma rede de apoio com pessoas de dentro e fora da escola. Certamente há outras formas de se enfrentar esse desafio e esperamos que este texto sirva de inspiração para os leitores que atuam nessa área.

Referências

BERSCH, R. *Tecnologia assistiva:* metodologia para estruturação de serviço em escolas públicas. 2009. Dissertação (Mestrado em Design) – Programa de Pós-Graduação em Design, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

BRASIL. *Constituição da República Federativa do Brasil.* 1988.

______. *Estatuto da Criança e do Adolescente no Brasil.* Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990.

______. Ministério da Educação. *Lei 9394/96.* Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União, 23 de dezembro de 1996.

______. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Adaptações Curriculares / Secretaria de Educação Fundamental. Secretaria de Educação Especial. Brasília: MEC /SEF/SEESP, 1998.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Resolução CNE/CEB, n. 2,* de 11 de fevereiro de 2001. Institui diretrizes nacionais para a educação especial na educação básica. Brasília, 2001.

______. *Estratégias para a educação de alunos com necessidades educacionais especiais.* Coordenação geral: SEESP/MEC; organização: Maria Salete Fábio Aranha. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial, 2003.

______.*Decreto nº 5.296*, de 02 de dezembro de 2004. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/decreto/d5296.htm>. Acesso em: 30 jun. 2015

______. *Estatuto da criança e do adolescente - ECA***.** Lei nº 8.069/90, atualizada com a Lei nº 12.010, de 2009, inclusa a Lei nº 12.594, de 2012 (SINASE). 3. ed. Santa Catarina, 2012. Disponível em: <https://www.tjsc.jus.br/infjuv/documentos/ECA_CEIJ/Estatuto%20da%20Crian%C3%A7a%20e%20do%20Adolescente%20editado%20pela%20CEIJ-SC%20vers%C3%A3o%20digital.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

______. Subsecretaria Nacional de Promoção dos Direitos da Pessoa com Deficiência. Comitê de Ajudas Técnicas Tecnologia Assistiva. *Tecnologia Assistiva*. Brasília: CORDE, 2009. 138 p. Disponível em: <http://www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/publicacoes/livro-tecnologia-assistiva.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

______. CNE. CEB. *Resolução n. 4,* de 2 de outubro de 2009, que institui diretrizes operacionais para o atendimento educacional especializado na educação básica, modalidade educação especial. Brasília, 2009.

CAPELLINI, V. L. M. F.; RODRIGUES, O. M. P. R. Concepções de professores acerca dos fatores que dificultam o processo da educação inclusiva. *Educação*, Porto Alegre, v. 32, n. 3, p. 355-364, set./dez. 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/viewFile/5782/4203>. Acesso em: 30 jun. 2015.

CARLETTO, A. C.; CAMBIAGHI, S. *Desenho Universal:* um conceito para todos. 2008. Disponível em: <http://www.vereadoramaragabrilli.com.br/files/universal_web.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

FERNANDES, H. A. A.; HEALY, L. As Concepções de Alunos Cegos para os Conceitos de Área e Perímetro. In: IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte, MG. *Anais...*, Belo Horizonte: SBEM, 2007.

GALVÃO FILHO, T. A.; GARCIA, J. C. D. *Pesquisa Nacional de Tecnologia Assistiva*. São Paulo: Instituto de Tecnologia Social - ITS BRASIL; Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação - MCTI/SECIS, 2012. 68 p.

KRANZ, C. R. *Os jogos com regras na perspectiva do desenho universal: contribuições à educação matemática inclusiva*. 2014. 290 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2010.

______. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na* *formação de professores*. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012, p. 3-37.

MANTOAN, M. T. E. Por uma Escola (de Qualidade) para Todos. In: MACHADO, N. J. et al. *Pensando e Fazendo Educação de Qualidade***.** São Paulo: Moderna, 2001.

MANTOAN, M. T. E.; PRIETO, R. G.; ARANTES, V. A. (Org.). *Inclusão escolar:* pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, 2006.

MARCELLY, L. *As histórias em quadrinhos adaptadas como recurso para ensino da matemática para alunos cegos e videntes*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

MARCELLY, L. *Do improviso às possibilidades de ensino:* estudo de caso de uma professora de matemática no contexto da inclusão de estudantes cegos. 2015. 194 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula:* tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

OLIVEIRA, F. I. W. de; PROFETA, M. S. Educação Inclusiva e Alunos com Necessidades Educacionais Especiais. In: OLIVEIRA, A. A. S. et al. (org.). *Inclusão Escolar:* as contribuições da Educação Espacial. São Paulo: Cultura Acadêmica Editora; Marília: Fundepe Editora, 2008. 288 p.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.**).** *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012, p. 77-92.

PELOSI, M. B. Por uma escola que ensine e não apenas acolha recursos e estratégias para inclusão escolar. In: MANZINI, E. J. (Org.). *Inclusão e acessibilidade*. Marília: ABPEE, 2006. 180 p.

PIMENTEL, S. C. Formação de professores para a inclusão: saberes necessários e percursos formativos. In: MIRANDA, T. G.; GALVÃO FILHO, T. A. (Org.). *O professor e a educação inclusiva: formação, práticas e lugares*. Salvador: EDUFBA, 2012, p. 139-145.

REILY, L. *Escola Inclusiva:* Linguagem e mediação. Campinas: Editora Papirus, 2004.

RODRIGUES, O. M. P. R. et al. *Fundamentos históricos e conceituais da Educação Especial e Inclusiva:* reflexões para o cotidiano escolar no contexto da diversidade, 2014. Disponível em: <http://acervodigital.unesp.br/bitstream/unesp/155246/1/unesp-nead_reei1_ee_d01_s03_texto02.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

SILVA, M. C. R. F.; PINTO, T. C. L. *Inclusão social:* o design como parte integrante no ensino da arte. Florianópolis, v. 02, 2010, jan./dez. 2009.

VIANNA, S. C.; SILVA, B. P.; ROCHA, D. F. da ROCHA; PEREIRA, M. M.; BARBOSA, P. M.; CASTRO, V. F.; O ensino de simetria para deficientes visuais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte, MG. *Anais*... Belo Horizonte: SBEM, 2007.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem.* Trad.: Jeferson Luiz Camargo. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

Capítulo oito

O uso de vídeos de aula em um processo formativo sobre o ensino de álgebra

Alessandro Jacques Ribeiro[1]
Marcia Aguiar[2]
Vinícius Pazuch[3]

Introdução

A formação de professores que ensinam matemática ganhou destaque na literatura em Educação Matemática nas últimas décadas, fato que podemos observar pela amplitude de pesquisas desenvolvidas (GELLERT; HERNANDÉZ; CHAPMAN, 2013; PONTE, 2014; STAHNKE; SCHUELER; ROESKEN-WINTER, 2016; FIORENTINI; PASSOS; LIMA, 2016).

Muitas destas pesquisas têm sido realizadas tomando-se como referencial teórico os trabalhos de Shulman (1986; 1987), assim como outros referenciais que o tomam por base e que problematizam o professor de matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; GRAEBER; TIROSH, 2008; TURNER; ROWLAND,

---

[1] Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Atualmente é professor no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

[2] Doutora em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP). Atualmente, professora no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: marcia.aguiar@ufabc.edu.br"

[3] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil. Atualmente é professor no Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: vinicius.pazuch@ufabc.edu.br

2011). Outras vertentes teóricas que também discutem a formação do professor fundamentam-se na prática dos professores como elemento fundante e como ponto de partida para a compreensão do que o professor conhece, de como ele conhece e para que ele conhece (PONTE; 1994, 1999; COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999; FIORENTINI, 2000; PONTE; CHAPMAN, 2008; MATOS; POWELL; SZTJAN, 2009).

Há de se considerar ainda as pesquisas que discutem o distanciamento entre a matemática ensinada nos cursos de formação inicial de professores (as Licenciaturas) e as práticas matemáticas efetivamente relacionadas à atuação na Escola Básica. Isto é, envolve a desconsideração, nas estruturas curriculares daqueles cursos, das especificidades de conhecimentos de conteúdo matemático relacionados ao ensino (FIORENTINI, 2005; MOREIRA, 2012; FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013; MOREIRA; FERREIRA, 2013).

Assim sendo, parece-nos legítimo e relevante buscar desenvolver trabalhos que envolvam os professores - em formação inicial e já em atuação - no âmbito de processos formativos que tenham como propósito se (re)pensar os modos de construção e circulação de conhecimentos matemáticos que sejam pertinentes ao ensino e à aprendizagem da matemática na/da Educação Básica (SMITH, 2001). No caso deste capítulo, nossa proposta é problematizar processos formativos referentes ao ensino de Álgebra, importante área da matemática da escola básica.

Nosso interesse pelo ensino de Álgebra se justifica a partir de resultados de pesquisas que apontam para o insucesso dos estudantes quando aprendem Álgebra (MATOS; PONTE, 2009; DORIGO; RIBEIRO, 2010; CYRINO; OLIVEIRA, 2011; PONTE; VELEZ, 2011; STEPHENS; RIBEIRO, 2012) e, ao mesmo tempo, pelas dificuldades apresentadas pelos professores quando estão ensinando-a na Educação Básica (DOERR, 2004; LI, 2007; RIBEIRO, 2012; PONTE; BRANCO, 2013; BARBOSA; RIBEIRO, 2013; RIBEIRO; OLIVEIRA, 2015; PAZUCH; RIBEIRO, 2017).

Não obstante à problemática que se apresenta, há ainda questões de pesquisas que se referem mais especificamente às relações entre os conhecimentos de matemática para o ensino e a articulação de diferentes campos da matemática na Educação Básica. No que diz respeito, por exemplo, aos conhecimentos algébricos, pode-se situar os conceitos de equação e de função como fundamentais e estruturantes para a Álgebra e para a Matemática da escola básica (SIERPINSKA, 1992; DOERR, 2004; McCRORY et al., 2012; RIBEIRO, 2012; RIBEIRO; CURY, 2015; RIBEIRO; OLIVEIRA, 2015; WASSERMAN, 2015).

Assim sendo, neste capítulo, apresentamos alguns resultados de uma pesquisa longitudinal[4] desenvolvida na Universidade Federal do ABC (UFABC), a qual investigou os conhecimentos algébricos de professores de matemática da Educação Básica. O recorte que fizemos para discutir no presente capítulo apresenta resultados de um processo formativo[5] acerca dos conceitos de equação e de função levado à cabo durante o ano de 2016 e que será melhor contextualizado posteriormente. Tomamos como referencial teórico-metodológico para o desenvolvimento de nossa proposta de formação e para a análise dos dados, os trabalhos de Ball e Cohen (1999) sobre Tarefas de Aprendizagem Profissional[6] (TAP) e o modelo teórico *Knowledge Quartet*[7], de Turner e Rowland (2011). Ainda, agregamos à nossa base teórica os trabalhos de Ponte (2005) sobre o uso de tarefas[8]

---

[4] Projeto de Pesquisa *"Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais"*, financiado pelo Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Capes, sob protocolo 1600/2012. O primeiro autor do capítulo é o coordenador do projeto e os dois outros autores membros da equipe de desenvolvimento.

[5] Curso de Extensão *"O Ensino de Álgebra para a Educação Básica"* realizado com o apoio institucional e financeiro da Pró-reitora de Extensão e Cultura (PROEC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). O curso foi uma das ações desenvolvidas no âmbito no projeto OBEDUC (1600/2012)

[6] No original, em inglês, *Professional Learning Tasks* (PLT).

[7] Mantivemos a nomenclatura como no original, em inglês, pois é dessa forma que o referido modelo teórico tem sido utilizado em pesquisas internacionais.

[8] Estamos utilizando o termo "tarefas", no sentido de Ponte (2005), para as situações matemáticas elaboradas pelos professores-participantes e que foram desenvolvidas junto aos alunos da Educação

no ensino de Matemática e os estudos de Ribeiro e Cury (2015) no que se refere à formação do professor e o ensino de Álgebra.

Após essa breve introdução, que buscou apresentar a problemática que nos motivou a desenvolver o processo formativo que compartilhamos neste capítulo, assim como, apresentar elementos teóricos e metodológicos que fundamentaram nosso estudo, passamos a apresentar o contexto, no qual a formação que propiciamos foi desenvolvida. Em seguida, em duas seções, trazemos e discutimos resultados referentes ao processo formativo e os conceitos de equação e de função. Por fim, nas conclusões e considerações finais, buscamos retomar a problemática apresentando avanços e limitações de nossa proposta em torno dos conhecimentos profissionais do professor que ensina Álgebra na Educação Básica.

Contexto do Processo Formativo

O curso de extensão

A formação oferecida por nosso grupo de pesquisa[9], denominada *"O ensino da álgebra para a educação básica",* foi desenvolvida durante nove meses, no período de março a dezembro de 2016, tendo priorizado a realização de estudos teóricos e a relação destes com a prática letiva. Foram desenvolvidas análises e discussões de diferentes situações - matemáticas e didáticas - envolvendo a Álgebra e seu ensino, sobretudo no que se referia, mais especificamente, às estruturas algébricas e suas possíveis conexões com a Álgebra escolar.

Básica. Por outro lado, utilizamos "tarefas de aprendizagem professional", no sentido de Ball e Cohen (1999), para as tarefas propostas pelos formadores e que foram desenvolvidas com os professores-participantes, durante o processo formativo.

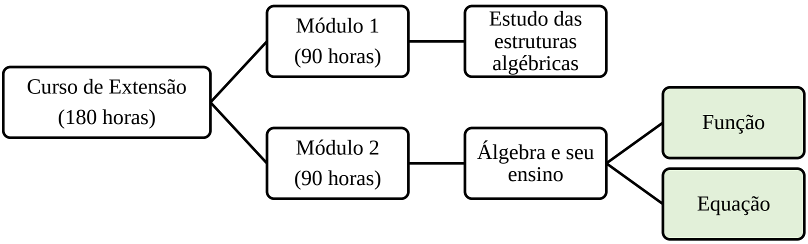
[9] "FORMATE - Formação Matemática para o Ensino", grupo de pesquisa credenciado no CNPq e que desenvolve pesquisas sobre conhecimentos profissionais do professor de matemática. Disponível em 15/06/2017 em < http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8814738426604861>

A equipe de formadores que organizou e desenvolveu o curso era composta por estudantes da licenciatura em matemática e da pós-graduação em educação matemática, além de professores universitários, todos membros do grupo de pesquisa FORMATE. A equipe se dividiu em subgrupos que eram sempre compostos por, ao menos, 1 estudante de licenciatura, 2 estudantes de pós-graduação e 2 professores universitários. Cada subgrupo ficou responsável por diferentes temas matemáticos referentes à Álgebra e seu ensino. As sessões de formação - que denominamos por encontros - eram sempre conduzidas por 1 professor da universidade proponente e por 1 estudante de pós-graduação. Semanalmente, os subgrupos se reuniam para discutir e organizar os encontros, bem como, mensalmente, toda a equipe se reunia para refletir sobre o andamento do curso, seus resultados e as próximas ações.

Dentre os principais objetivos do curso que eram considerados na perspectiva de ampliar a formação dos professores-participantes, destacamos (i) *discutir diferentes significados de conceitos matemáticos do campo da Álgebra que emergem nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática da escola básica* e (ii) *conhecer e compreender o papel de tarefas matemáticas que contemplem diferentes significados de conceitos algébricos para a formação dos professores envolvidos.*

O curso contou com uma carga horária de 180 horas divididas em dois módulos de 90 horas cada. Foram realizados 31 encontros presenciais e nove sessões à distância, cada uma com duração de 4 horas e 30 minutos. O Quadro 8.1 sintetiza a estrutura do curso, com destaque para os momentos que queremos discutir neste capítulo, quer seja, o processo formativo em torno dos conceitos de equação e de função.

Quadro 8.1: Desenho organizacional do curso de extensão



Fonte: Elaborado pelos autores

Os encontros

Os encontros presenciais ocorreram nas dependências da Universidade Federal do ABC, sempre com o caráter de trabalho em colaboração[10], no qual os professores-participantes eram, inicialmente, convidados a socializar seus conhecimentos e suas experiências acerca do tema a abordar no referido encontro. Os encontros formativos tomavam sempre como princípios teórico-metodológicos a dialogicidade, a reflexão, a tematização da prática e os registros na/da construção dos conhecimentos profissionais docentes do professor de matemática da escola básica, tendo como referencial teórico pesquisas relacionadas ao tema de estudo a debater no encontro.

O grupo optou durante o processo formativo pelo "uso de vídeos de aulas", pois este tem sido utilizado como uma importante ferramenta que pode propiciar o desenvolvimento profissional de professores (SANTAGATA; GUARINO, 2011; COLES, 2013; TAYLAN, 2017) e, uma vez que nosso capítulo foca justamente em apresentar essa metodologia como uma possibilidade de processo formativo de

[10] Usamos o termo "trabalho em colaboração" no sentido do senso comum, na medida em que, tanto formadores como professores-participantes, tinham espaço para apresentar suas ideias, suas dúvidas, suas tensões e desconfortos no que se referia aos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra.

professores, detalhamos a seguir como ocorreram os encontros que tiveram por objetivo discutir e refletir coletivamente acerca dos conhecimentos matemáticos para o ensino (TURNER; ROWLAND, 2011) mobilizados por dois professores ao ministrar aulas sobre equação e função em turmas de estudantes da Educação Básica.

Inicialmente, os professores-participantes do curso elaboraram planos de aula sobre os conceitos de equação e de função. Dentre esses planos, foram escolhidos quatro planos para o desenvolvimento com estudantes em salas de aula do 9º Ano do Ensino Fundamental e 1º Ano do Ensino Médio, sendo dois planos sobre equação e dois sobre função. Neste capítulo, apresentamos aspectos do planejamento, das ações docentes e da reflexão sobre episódios de uma aula do 9º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de equação (Apêndice 1) e uma aula do 1º Ano do Ensino Médio sobre o conceito de função (Apêndice 2). Os planos de aula foram desenvolvidos em sala pelos professores Paul[11] e Carlos e, posteriormente, os episódios dessas aulas foram analisados coletivamente por todos os professores-participantes do curso. Nas próximas seções, retomaremos a apresentação e a descrição dos planos de aula desenvolvidos, assim como a apresentação dos professores que ministraram as aulas.

Entendemos ser importante destacar aqui como decorreram os encontros nos quais se deram as análises das aulas sobre equação e função desenvolvidas nas escolas. Para guiar os professores-participantes em torno dos objetivos intencionados com a análise coletiva dos vídeos das aulas, elaboramos uma Tarefa de Aprendizagem Profissional[12] - TAP (disponível nos apêndices), na qual foi apresentado um roteiro (Apêndice 3) com questões

---

[11] O professor Paul é identificado por um nome fictício, enquanto o professor Carlos preferiu que utilizasse seu nome verdadeiro.

[12] Estamos entendendo o conceito de Tarefa de Aprendizagem Professional (TAP), no original "*Professional Learning Task - PLT*", segundo Ball e Cohen (1999) como sendo tarefas nas quais envolvemos os professores no trabalho do ensino e de sua prática, no intuito de promover aprendizagens profissionais nos mesmos, tomando sempre, como ponto de partida, seus conhecimentos prévios e suas experiências de sala de aula.

preparadas pelos formadores e que tinha por base teórica o *Knowledge Quartet* (TURNER; ROWLAND, 2011). Os professores-participantes assistiam a episódios (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004) selecionados pelos formadores e os analisavam segundo o roteiro elaborado e apresentado na TAP.

Os professores-participantes

Os professores-participantes do curso eram, em sua maioria, licenciados em matemática (apenas dois professores não possuíam formação específica para ensinar matemática na Educação Básica). O grupo era composto por 11 professores e 5 professoras, com idade média de 33 anos e, dentre os participantes, 3 deles não possuíam experiência em sala de aula, exceto as horas de estágio supervisionado. Deste grupo saíram os dois professores voluntários que desenvolveram os planos de aula, em salas em que não atuavam como professores regentes. Os perfis dos professores são apresentados a seguir.

A aula do 9º no Ensino Fundamental, sobre o conceito de equação, foi ministrada pelo professor Paul que, na época da aula, tinha 39 anos de idade. Ele possuía formação em licenciatura e bacharelado em matemática, mestrado em educação matemática e acabara de concluir a graduação em pedagogia. Embora possuísse experiência em sala de aula como professor, naquele momento, trabalhava com processos de formação continuada com professores da rede SESI/SP de ensino.

Já a aula do 1º ano do Ensino Médio, sobre o conceito de função, foi desenvolvida pelo Carlos que, na época da aplicação, possuía 21 anos de idade e estava cursando o último semestre do curso de licenciatura em matemática, numa faculdade privada da cidade de Guarulhos, sediada na região metropolitana de São Paulo. Não possuía experiência em sala de aula, mas atuava como plantonista em um colégio particular de Guarulhos e foi monitor da disciplina de álgebra na faculdade em que estudava.

Nas próximas duas seções, apresentamos os planos de aulas desenvolvidos nas duas turmas da Educação Básica, acompanhado das análises - realizadas pelos próprios professores-participantes - acerca dos episódios extraídos dos vídeos das referidas aulas.

Processos de Formação sobre os Conceitos de Equação e de Função

Como discutido na seção anterior, os professores-participantes elaboraram em grupos os planos de aulas, os quais foram apresentados a todos os outros grupos. Após a apresentação, houve uma discussão sobre cada plano e refletiu-se se os objetivos estipulados foram alcançados. A partir de algumas negociações entre os professores foram escolhidos os planos de aula a serem desenvolvidos em sala de aula com dois professores-participantes voluntários. Essas aulas foram videogravadas e transformadas em episódios.

Apresentamos nesta seção as tarefas de aprendizagem profissional desenvolvidas no processo formativo, as quais tinham por proposta analisar os vídeos de aulas desenvolvidas no 9º ano do Ensino Fundamental, sobre o conceito de equação e, no 1º ano do Ensino Médio, sobre o conceito de função. Assim, discutiremos as análises dos professores-participantes de alguns episódios dessas aulas com foco em suas aprendizagens profissionais[13] referentes à Álgebra e seu ensino.

A aula de equação numa turma de 9º ano do Ensino Fundamental

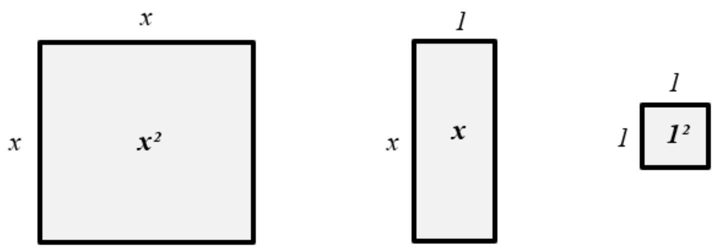
A proposta para a elaboração do plano de aula para o 9º ano

[13] O conceito de Aprendizagem Profissional (de Professores) é um conceito bastante amplo e controverso. No entanto, em nosso trabalho, consideramos a Aprendizagem do Professor de Matemática como um movimento que inclua reflexões e ações que considerem um tipo de conhecimento local que leve em conta os problemas, as rotinas, as aspirações que tenham sido - e ainda estejam sendo - moldadas por práticas e crenças individuais (OPFER; PEDDER, 2011).

tinha como objetivo discutir o conceito de equação a partir de diferentes perspectivas, quer sejam, geométrica, estrutural e aplicacional[14]. O plano de aula escolhido utilizou a relação entre o cálculo de áreas de quadrados e a expressão algébrica para resolver uma equação polinomial de 2º grau, visando discutir o conceito de equação a partir de uma perspectiva geométrica. A proposta das tarefas (Apêndice 1) que compõem esse plano de aula está baseada na utilização de peças (Figura 1) para escrever algebricamente o cálculo de áreas de um quadrado (Figura 2) e, assim, desenvolver a fatoração do trinômio quadrado perfeito e, a partir disso, compreender a técnica de completamento de quadrados para resolver algumas equações polinomias de 2º grau. Dessa maneira, os estudantes poderiam encontrar outra estratégia para resolver algumas equações de 2º grau, além da usualmente utilizada nas escolas, a "fórmula de Bháskara".

Para a realização da aula, os estudantes receberam peças feitas por EVA de três formatos distintos, cada lado tinha uma "medida" estipulada pelo professor, como estão indicadas na Figura 8.1.

Figura 8.1: Peças de EVA



Fonte: Elaborado pelos autores

A tarefa foi desenvolvida em um período composto por 3 aulas de 50 minutos cada. Paul foi o professor voluntário para essa sala. A escola que autorizou a realização da tarefa é da rede pública do

[14] A elaboração do plano de aula do 9º ano do Ensino Fundamental fundamentou-se no modelo Perfil Conceitual de Equação (RIBEIRO, 2013).

estado de São Paulo, na zona sul da capital. Naquele dia havia 38 alunos na sala, os quais foram divididos em grupos de, no máximo, 5 alunos para desenvolverem a tarefa proposta.

Esta aula foi videogravada e dividida em 8 episódios, sintetizados no Quadro 8.2, que foram apresentados para reflexão e análise dos professores-participantes, posteriormente, durante um encontro do processo formativo. A seleção dos episódios baseou-se na noção de Powell, Francisco e Maher (2004) e foram elaborados a partir das seguintes ações docentes:

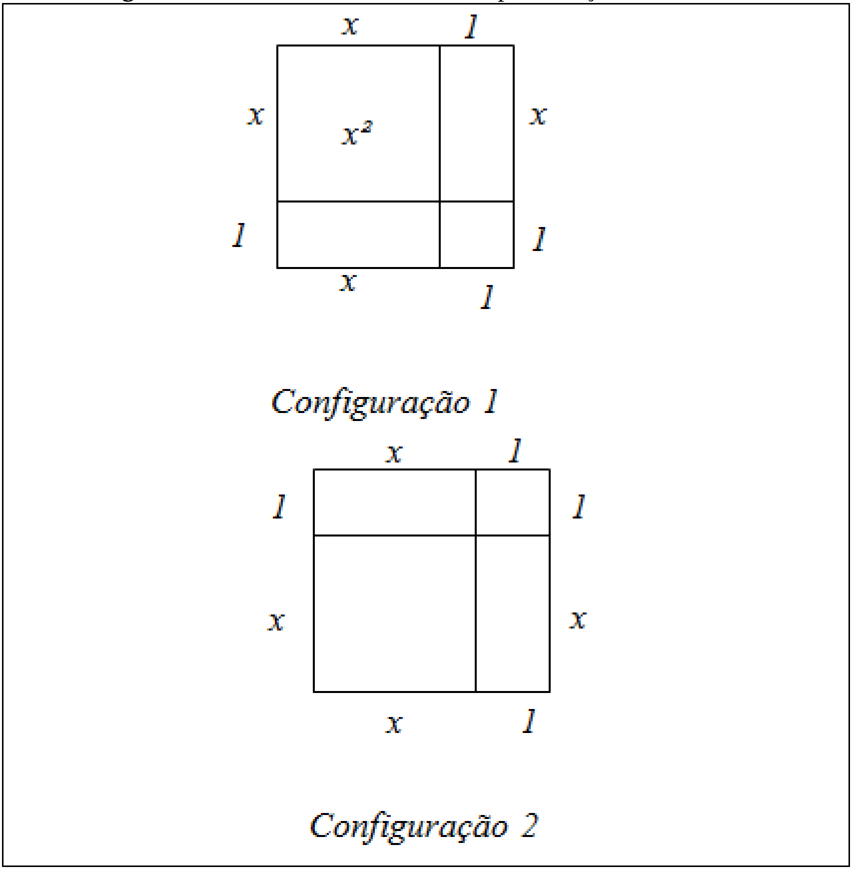
Quadro 8.2: Episódios da aula do 9º ano do Ensino Fundamental

Episódio	Ações docentes
(1)	Apresentação do professor Orientação para a formação dos grupos
(2)	Apresentação do material que seria utilizado: quadrados e retângulos de tamanhos iguais e diferentes feitos em EVA (Figura 1) Discussão dos cálculos de área de quadrados e retângulos
(3)	Leitura e resolução da Tarefa 1.
(4)	Leitura e resolução da Tarefa 2.
(5)	Leitura e resolução da Tarefa 3 Discussões: Qual é a diferença entre 1.x e 1 + x? Qual é o valor do lado cujo quadrado possui área igual a $x^2 + 2x + 1$? Resolver a equação $x^2 + 2x + 1 = 9$
(6)	Introdução à Tarefa 4.
(7)	Resolução da Tarefa 4.
(8)	Resolução da Tarefa 5.

Fonte: Elaborado pelos autores

Para compreendermos o desenvolvimento da aula, os estudantes haviam representado a expressão algébrica x^2+2x+1 com as peças de EVA e, a partir desse momento, o professor desenha todas as representações que surgiram nas resoluções dos estudantes na lousa (Figura 8.2). A seguir, o professor propõe outra questão: Qual é o valor do lado cujo quadrado possui área x^2+2x+1?

Figura 8.2: Desenhos das diferentes representações de x^2+2x+1



Fonte: Elaborado pelos autores

Acompanharemos uma parte da transcrição do 5º episódio (Quadro 2), exatamente após o professor perguntar aos alunos: qual é o valor do lado cujo quadrado possui área x^2+2x+1?

Transcrição do 5º episódio da aula

(1) **Professor Paul**: $1 + x$ é o lado do nosso quadrado, né? Ou posso escrever assim também né? [escreve na lousa $x + 1$] $x + 1$ que é a mesma coisa, certo? O que isso significa? O que a gente está fazendo? O nosso quadrado

[referindo-se aos quadrados da Figura 2 que ele desenhou na lousa] ele não tem essa área aqui ó $x^2 + 2x + 1$ [escreve na lousa a expressão x^2+2x+1]? Então isso daqui [apontando para a expressão x^2+2x+1] significa que eu elevei o $x + 1$ ao quadrado, que é $x + 1$ vezes $x + 1$. Estão entendendo o que eu estou dizendo? Todo mundo está entendendo? Porque aqui ó... [professor vai até a lousa e desenha um quadrado e coloca 2 como medida do seu lado]. Vamos voltar lá no comecinho ó... Se o meu quadrado aqui tem lado 2 e a área eu fiz 2 vezes 2 que deu 4. Aqui ó [apontando para o quadrado da configuração 1 da Figura 2 que está desenhado na lousa] para a área ser $x^2 + 2x + 1$ significa que nós elevamos quem ao quadrado?

(2) **Estudantes**: x.

(3) **Professor Paul**: x?

(4) **Estudantes**: $x + 1$.

(5) **Professor Paul**: Estão entendendo o que eu estou falando ou não? Ó...

(6) **Estudante 4**: Basicamente sim.

(7) **Professor Paul**: Eu tô falando é isso daqui ó [desenha outro quadrado na lousa e coloca 3 como medida do lado] se eu tiver um quadrado que o lado dele mede 3, qual vai ser a área desse quadrado?

(8) **Estudante 2**: 9

(9) **Professor Paul**: Qual vai ser a área?

(10) **Estudantes**: 9

(11) **Professor Paul**: 9 por quê?

(12) **Estudantes**: 3 vezes 3 dá 9

(13) **Professor Paul**: 3 vezes 3 ou 3 ao quadrado. Agora o nosso quadrado lá [aponta para o quadrado da Figura 2] tem área $x^2 + 2x + 1$ é isso? Por que quem foi elevado ao quadrado pra dar isso daqui de área? [professor aponta para a expressão $x^2 + 2x + 1$ na lousa]

(14) **Estudante 4**: Solta a voz!
(15) **Professor Paul**: Quem que foi elevado ao quadrado...
(16) **Estudante 2**: x
(17) **Professor Paul**: ... pra dar essa área?
(18) **Estudantes**: x
(19) **Estudante 1**: $+1$
(20) **Professor Paul**: Se eu elevar x ao quadrado vai dar quanto?
(21) **Estudante 3**: x^2
(22) **Professor Paul**: Então quem que foi elevado ao quadrado pra dar isso aqui? [apontando para a expressão $x^2 + 2x + 1$]
(23) **Estudante 3**: $x + 1$
(24) **Estudante 4**: $x + 1$! Vocês não soltam a voz.
(25) **Professor Paul**: Vocês já tinham entendido isso, já... É que eu estou ajudando a gente a organizar as ideias, tá bom? Então o que significa que $x^2 + 2x + 1$ é a área de um quadrado de lado $x + 1$, tudo bem?

Após assistirem este episódio, os professores-participantes do processo formativo, inclusive o Paul, discutiram e analisaram esses episódios por meio de um roteiro de questões (Apêndice 3), que fora construído na perspectiva do conhecimento que o professor de matemática mobiliza em sala de aula (TURNER; ROWLAND, 2011). Houve uma conversa com todo o grupo refletindo sobre a postura de Paul durante a aula.

Na sequência destacamos a transcrição da discussão dos professores em relação ao episódio apresentado neste trabalho.

Transcrição da discussão sobre o episódio assistido durante o processo formativo

(1) **Pesquisadora**: E aí? O que vocês acharam desse episódio? Denso? Difícil?

(2) **Professor 1**: Difícil! Eu achei que eles estavam com muita dúvida na parte do cálculo da área. Quando o Paul falava para eles de que tava com 3 [significa que o professor desenhava na lousa um quadrado de lado 3 e perguntava, qual era a área desse quadrado], eles respondiam muito rápido [o valor da área era nove] depois com 2, também [o professor perguntava qual era a área de uma quadrado de lado 2]. Agora quando ele [o professor] falou assim: Qual é o valor que elevado ao quadrado eu tenho $x^2 + 2x + 1$? Aí... eles [os estudantes] não respondiam, acho que é porque eles não tem ainda uma noção muito boa ainda da distributiva. Você multiplicando (x + 1) por (x + 1) pode dar aquilo. Ou melhorando a pergunta, né? Por exemplo, qual é o valor que eu tenho que elevar ao quadrado para obter a área? Se eles sabiam que a área era $x^2 + 2x + 1$ era só melhorar, por exemplo, a pergunta (...) pra ver se (...) puxava algo diferente neles, né?

(3) **Paul**: É! Eu fui tentando fazer várias perguntas.

(4) **Professor 1**: É! Eu vi!

(5) **Professor 2**: Eu faria outra pergunta: Esse quadrado que foi formado qual é o valor do lado, né? Aí quando falasse [o valor do lado do quadrado formado com as peças (Figura 2)], eu falava assim: aí (...) eu tenho o valor do lado, como é que eu faço para achar a área?

(6) **Professor 1**: Na 1ª parte [a transcrição colocada nesse texto é o começo do 5º episódio], quando ele perguntou o valor do lado, eles [os estudantes] falaram. Só que eles ficaram x e o outro falava + 1. E o outro x + 1. Aí saíram. Mas acho que acaba uma confusão na cabeça deles por causa dessa parte. Eles têm que pensar diferente do convencional. Eles têm que somar com número, aí de repente coloca x no meio. Aí, foi o que Paul falou: Eles [os estudantes] ficaram meio tensos.

Nessa análise, os professores-participantes perceberam as interações ocorridas entre o professor e as ideias dos estudantes e, segundo a percepção de alguns professores-participantes, os estudantes apresentaram muitas dificuldades em encontrar o lado do quadrado que possuía a área igual a $x^2 + 2x + 1$. A sugestão deles era que a tarefa deveria ser abordada com outras perguntas. Na verdade, as outras possibilidades apresentadas pelos professores 1 e 2 (na transcrição acima) tentaram deixar mais explícito para o aluno a relação entre o lado do quadrado $(x + 1)$ e a representação do cálculo da área $(x + 1)^2$, a qual é equivalente à representação algébrica da soma das áreas das 4 figuras (quadrados e retângulos) que formam o quadrado grande (Figura 2) que resulta na expressão $x^2 + 2x + 1$.

Nas análises gerais de todos os episódios, com base no roteiro e no próprio diálogo entre os professores, podemos notar que eles perceberam: (1) o professor Paul demonstrou possuir o conhecimento do conceito de equação e da relação das equações com o cálculo de áreas de quadrado e (2) Paul não cometeu nenhum erro conceitual; (3) a aula foi dialogada e Paul proporcionou interações entre todos os estudantes; (4) Paul fez uso de uma linguagem acessível (linguagem matemática, inclusive) aos estudantes; (5) Paul utilizou-se de diferentes representações (algébrica e geométrica); (6) percepção que os estudantes no final da tarefa não estavam mais interessados em participar, eles pareciam cansados com o tipo de tarefa e (7) o plano de aula tinha como objetivo desenvolver a técnica de completamento de quadrados para resolver algumas equações de 2º grau, mas alguns estudantes não abriram mão de usar a "fórmula de Bháskara". Na avaliação dos professores-participantes, esta tarefa deveria ser desenvolvida em salas, nas quais os estudantes não tivessem estudado a resolução da equação de 2º grau pela "fórmula de Bháskara", pois, eles acreditavam que assim a tarefa teria mais sentido para os estudantes.

A aula de função numa turma de 1º ano do Ensino Médio

Como já descrito anteriormente no contexto do curso, nesta seção apresentamos aspectos do planejamento, das ações docentes manifestadas nos episódios de aula e da reflexão sobre episódios de uma aula do 1º Ano do Ensino Médio, com 32 estudantes, divididos em grupos de quatro pessoas, em uma sala de aula convencional, com o uso de computador e equipamento multimídia.

Em particular, o plano de aula foi composto por uma tarefa que tinha como objetivo utilizar o *software* GeoGebra para investigação e resolução de uma situação-problema envolvendo o conceito de função afim. A tarefa (Apêndice 2) foi elaborada, por um dos grupos de professores, tendo como base o estudo realizado por Gafanhoto e Canavarro (2014). Na sequência, descrevemos a tarefa de ensino da mesma forma como essa foi desenvolvida com a turma de estudantes.

A partir da filmagem da aula, isto é, da coprodução do plano de aula com a turma de estudantes, a aula foi assistida e as ações docentes constituíram sete episódios de aula. A seguir, descrevemos os episódios de aula (Quadro 8.3). O referido quadro foi elaborado baseando-se na descrição de episódios presente em Powell, Francisco e Maher (2004).

Quadro 8.3: Episódios da aula do 1º ano do Ensino Médio

Episódio	Ações docentes
(1)	- Discute as potencialidades do *software* GeoGebra para o estudo de funções. - Informa que a tarefa será desenvolvida em grupo.
(2)	- Apresenta e discute com os estudantes as ferramentas do *software* GeoGebra, em especial, sobre a construção de uma planilha (tabela). - Discute e questiona os estudantes sobre plano cartesiano, gráfico. - Apresenta como criar uma planilha (tabela) com o uso do *software* GeoGebra. - Usa o quadro-negro para mostrar e explicar como são realizadas as operações na planilha do *software*. - Apresenta um exemplo da função: $f(x) = x + 5$ e realiza, juntamente com os estudantes, como as operações são realizadas

	para construção de uma tabela que, posteriormente, geraria o gráfico.
(3)	- Preenche a tabela referente ao exemplo discutido com o uso do *software* GeoGebra, dialogando com os estudantes. - Discute e questiona os estudantes se a construção da tabela foi difícil. - Apresenta o exemplo da função $f(x)=2x+3$ e questiona os estudantes sobre a construção da tabela com o uso do *software* GeoGebra. - Realiza as operações para a obtenção da tabela e faz a verificação dos valores obtidos para os pares ordenados, em diálogo com os estudantes, a partir dos comandos na planilha. - Explica e mostra a lista de pontos obtidos no plano cartesiano. - Explica que essa lista de pontos gerará uma representação gráfica, discutindo que poderão ser criadas várias representações gráficas. - Mostra que o conjunto de pontos obtidos é um caminho poligonal e informa que isso pode ser a representação gráfica de uma função.
(4)	- Faz a leitura e explica a tarefa da aula – “Qual é o melhor plano?” para os estudantes. - Pede aos estudantes que realizem o preenchimento das tabelas e respondam o item 3 da tarefa.
(5)	- Tenta preencher as tabelas com os recursos disponíveis na planilha do *software* GeoGebra, mas não obtém sucesso. - Usa a Planilha do Microsoft Excel para realizar o preenchimento dos dados e os transfere para a Planilha do *software* GeoGebra. - Realiza o preenchimento das tabelas e traça as linhas poligonais, em conjunto com os dados obtidos pelos estudantes (itens 4 e 5 da tarefa). - Questiona aos estudantes se alguns dos valores obtidos foram iguais entre os planos de telefonia em análise. - Compara as expressões algébricas obtidas em cada um dos planos (item 6 da tarefa).
(6)	- Dialoga com os estudantes sobre perguntas do item 7 da tarefa.
(7)	- Discute, a partir das representações gráficas, em quais dos intervalos cada plano de telefonia pode ser mais vantajoso. - Apresenta e explica os termos da expressão $f(x) = ax + b$, os quais representam uma função afim.

Fonte: Dados da pesquisa

Os referidos episódios de aula foram selecionados para a reflexão coletiva com os professores-participantes do processo formativo. A seguir, exibimos a transcrição de dois desses episódios, na perspectiva de elucidar a interação entre professor e estudantes, ocorrida durante a aula. O episódio de aula 1 discute as ações docentes do Quadro 8.3, referentes aos dois primeiros episódios de aula. Nesse sentido, o episódio a seguir trata da apresentação do *software* e da discussão do Professor Carlos em conjunto com os estudantes sobre as representações em forma de tabela, de forma algébrica, passando pela intenção em construir gráficos.

Transcrição do 1º episódio de aula

(1) **Professor Carlos**: (...) Hoje nós vamos trabalhar com o GeoGebra (...) Alguém já ouviu falar?
(2) **Estudante 1**: Sim.
(3) **Professor Carlos**: Já? Então, vocês já sabem mexer? Já estão familiarizados?
(4) **Estudantes**: não, não [risos].
(5) **Professor Carlos**: então, vamos lá. Quem já mexeu? Já mexeu, mas não lembra. Ele tem interfaces aqui (...) cada uma tem nome, um tipo de função diferente [Professor está mostrando as funções do *software* aos estudantes] (...) Eu vou mostrar agora, primeiramente, como nós vamos colocar algumas coisas em planilhas, para depois a gente transformar isso em gráfico, tá? Vocês sabem o que é gráfico né? É uma representação cartesiana. (...) Sabe o que é plano cartesiano, né? Lembram disso?
(6) **Estudantes**: Sim [risos].
(7) **Professor Carlos**: Então, vai aqui em Planilha [localiza a função do *software* e mostra aos estudantes] e vai aparecer isso [Janela 'Planilha'], um monte de quadradinhos aqui e isso não vai ter fim, tá [se refere às células que compõem a Planilha]. (...) As operações na

Planilha vão ficar da seguinte forma [usa o quadro-negro para apresentar as operações a serem usadas na Planilha do GeoGebra] (...) Por exemplo, se eu fizer isso aqui: [constrói uma tabela com os valores 2, 3, 4 e 5 distribuídos em uma coluna e escreve $f(x) = x + 5$]. O que significa isso aqui ó? [Se referindo à $f(x) = x + 5$]. Alguém sabe responder?

(8) **Estudante 2**: *f*(2) vai ser dois mais cinco... *f*(3) vai ser três mais cinco. (...)

O Episódio 2, na sequência, contempla as ações docentes descritas no Episódio de Aula 5. Em particular, o referido episódio revela um *insight* do professor Carlos em relação ao plano de aula previamente elaborado, que está no Apêndice 2.

Transcrição do 2º episódio de aula

(1) **Professor Carlos**: (...) pessoal, no aplicativo [*software* GeoGebra], a configuração dele está para não utilizar casa decimal, então para gente não perder tempo em configurar, eu coloquei aqui no Excel. Já ouviram falar do Excel né?

(2) **Estudantes**: sim.

(3) **Professor Carlos**: eu coloquei aquela planilha aqui no Excel, é praticamente a mesma coisa, até um pouco mais fácil de fazer.

(4) **Estudante**: e as cores? [As planilhas construídas para cada plano de telefonia, inicialmente, tinham cores diferentes]

(5) **Professor Carlos**: então, eu tentei colocar aqui no Excel cores aproximadas com as do GeoGebra. Então, oh, novamente, qual o seu nome [retoma a conversa anterior após usar a planilha do Excel]?

(6) **Estudante**: Victor.

(7) **Professor Carlos**: ele [o estudante Victor] disse para a gente que era o valor fixo mais o valor do minuto multiplicado pela quantidade de minutos [o professor continua realizando as operações para determinar as representações gráficas referentes aos três planos de telefonia] (...)

Após a realização do processo de assistir os episódios de aula, os professores-participantes, de forma coletiva, discutiram e realizaram a análise dos episódios assistidos por meio de um roteiro de questões, elaborado na perspectiva do conhecimento mobilizado pelo professor de matemática em situações de sala de aula. O referencial teórico utilizado para a constituição desse roteiro foi Turner e Rowland (2011).

Transcrição da discussão sobre o episódio assistido durante o processo formativo

(1) **Professora 1**: seria interessante realizar essa atividade no Laboratório.

(2) **Pesquisador**: sim. Mas como a escola não disponibilizava isso, o [Professor] Carlos usou o Data Show e fez um diálogo com os estudantes usando o GeoGebra.

(3) **Professor 2**: ah, o GeoGebra, é lindo, e maravilhoso, mas eu não consigo trabalhar com o GeoGebra.

(4) **Pesquisador**: Mais alguma coisa? Concordam ou não com os exemplos do Professor Carlos?

(5) **Professor 3**: (...) esse é o nosso problema, tem que deixar o aluno fazer, ele se apropriar [do *software*]. Mexe ali, participe daquele, sinta parte daquela aula, não só na aula dialogada, mas no fazer acontecer.

(6) **Professor 2**: a ideia [do plano de aula] era que o aluno fizesse no seu computador, para ele ir entendendo (...)

usasse o gráfico e a tabela e eles criarem o algoritmo também juntos. (...)

(7) **Professora 1**: [perguntando para o Professor Carlos] e durante a aula eles (estudantes) só ficavam assistindo? Ou faziam anotações?

(8) **Professor Carlos**: eles fizeram a atividade na folha que foi entregue a eles. Depois a gente conferiu na lousa os resultados deles e no GeoGebra. (...)

Nesse sentido, apresentamos como os episódios constituem uma visão panorâmica da aula e, aqui, entendemos o uso do vídeo como um instrumento fundamental em processos de formação de professores que ensinam matemática, em particular, sobre o ensino de álgebra. Assim, ao analisarem os episódios da aula do Professor Carlos, os demais professores, em conjunto, foram apontando aspectos constituintes da aula e promovendo reflexões em relação à dinâmica da aula, incluindo as ações do professor, a participação dos estudantes e a forma como o conceito de função foi estudado.

De forma geral, a análise dos episódios de aula feita pelos professores, com base no roteiro e no próprio diálogo, no coletivo, revelou que a aula do professor Carlos foi composta por: (1) uso de diferentes representações (algébrica, geométrica, tabular) para o estudo do conceito de função afim, por meio da tarefa escolhida; (2) utilização da Planilha do Excel como um desvio do plano de aula, uma vez que a construção das planilhas via *software* GeoGebra apresentou um imprevisto de configuração do *software*; (3) realização de conexões com conceitos da Geometria Analítica no decorrer da aula; (4) apresentação de exemplos de função afim; (5) participação reduzida dos estudantes no diálogo com o professor e (6) o plano de aula previa a realização da aula em um laboratório de informática, o que não ocorreu devido a estrutura da escola.

Na seção final deste capítulo discutimos algumas aprendizagens profissionais decorrentes desse processo formativo, o qual apresentou o movimento de planejamento, “execução” do plano de aula e análise de aulas. O uso de vídeo foi a principal ferramenta para o registro e a produção de conhecimentos em relação às situações de ensino desencadeadas.

Reflexões Finais

Como anunciado inicialmente em nosso capítulo, tínhamos como proposta problematizar processos formativos referentes ao ensino de Álgebra, tomando-se por base uma perspectiva teórico-metodológica que possibilitasse aos professores-participantes, (re)pensar os modos de construção e circulação de conhecimentos matemáticos que sejam pertinentes ao ensino e à aprendizagem da matemática na/da Educação Básica.

Para tal, utilizamo-nos de tarefas de aprendizagem profissional (BALL; COHEN, 1999) que contemplasse a elaboração, desenvolvimento e a reflexão sobre planos de aula acerca dos conceitos de equação e de função para a escola básica. As TAP que utilizamos em nosso processo formativo culminavam com a análise de episódios dos vídeos de aulas, desenvolvidas por dois professores voluntários participantes do processo formativo. O uso de vídeo tem sido recentemente utilizado como uma ferramenta que pode propiciar o desenvolvimento profissional de professores (SANTAGATA; GUARINO, 2011; COLES, 2013; TAYLAN, 2017) e, em nosso caso, utilizado para investigar os conhecimentos profissionais docentes na perspectiva de Turner e Rowland (2011).

Considerando nossas reflexões acerca das análises que foram desencadeadas pelos professores-participantes, quando da elaboração dos planos e, principalmente, quando da análise dos episódios de aula, pudemos observar um movimento de aprendizagem de todos os professores-participantes e, em especial, de Paul e de Carlos, em torno de (1) mobilização de conhecimentos matemáticos relativos aos conceitos de equação e de função que possibilitaram o desenvolvimento dos planos de aula; (2) mobilização e o uso de diferentes representações (algébrica, tabular, geométrica) quando da discussão sobre a elaboração das tarefas sobre equação e função; (3) mobilização de diferentes estratégias de ensino (no caso do Paul, uma aula mais discursiva e interativa; no caso do Carlos, uma aula mediada por um *software*) quando do desenvolvimento das aulas; (4) mobilização, por parte de todos os professores-participantes, de elementos dos conhecimentos matemático e didático relativos aos conceitos de equação e de função, quando da escolha do tipo de tarefa e da forma como elas seriam (no planejamento) e foram (na execução) desenvolvidas em salas de aulas de escolas de Educação Básica.

Embora possamos ter observado movimentos de ampliação e (re)construção dos conhecimentos profissionais dos professores-participantes no que se refere aos conceitos de equação e de função, reconhecemos algumas limitações que enfrentamos ao longo do processo formativo e, em especial, em relação aos encontros relatados no presente capítulo. Uma das limitações refere-se ao tempo necessário para se desenvolver um processo formativo dessa natureza. Os encontros não foram suficientes para se aprofundar as discussões acerca da análise dos vídeos. Além disso, poderíamos ter optado por discutir, com a autorização do professor que ministrou a aula, mas sem a sua presença, os episódios com o grupo de professores-participantes. Entendemos que, embora houvesse um espírito de colaboração e de parceria entre os participantes, talvez, sem a presença do colega que ministrou a aula, os demais participantes se sentissem mais confortáveis para levantar pontos controversos sobre a atuação do colega durante a execução da aula. Um outro ponto a se considerar, em uma outra oportunidade e/ou para adaptações da proposta que apresentamos, seria a participação de alguns outros professores durante o desenvolvimento das aulas na escola básica. Talvez, no momento em que as aulas estavam sendo desenvolvidas, os demais professores-participantes pudessem fazer anotações (por meio de um diário de campo) que favorecesse outras discussões e reflexões no momento coletivo de análise dos episódios dos vídeos de aulas.

Por fim, apesar das limitações que foram relatadas, entendemos que o uso de vídeo propicia uma aproximação das situações reais de ensino e das salas de aula, momentos em que, de fato, os conhecimentos são colocados em ação e podem ser observados, analisados e (re)construídos individual ou coletivamente. Reconhecemos que há ainda um número reduzido de pesquisas que tematizem, teórica e metodologicamente como buscamos fazer, os processos formativos e o desenvolvimento profissional dos professores de matemática da Educação Básica.

Referências

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Developing pratice, developing practioners: toward a pratice-based theory of professional education. In: G. Sykes e L. Darling-Hammond (Eds.) *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice*. San Francisco: Jossey Bass, pp. 3-32, 1999.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, Y. O.; RIBEIRO, A. J. Multisignificados de Equação: uma investigação acerca das concepções de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa* (Online), v. 15, p. 379-398, 2013.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, New York, v. 24, n. 1, p. 249-305, 1999.

COLES, A. Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Springer, Netherlands, p. 165-184, 2013.

CYRINO, M.; OLIVEIRA, H. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 97-126, 2011.

DOERR, H. M. Teachers' knowledge and teaching of algebra. In: STANCEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Ed.). *The future of the teaching and learning of* *algebra: The 12th ICMI Study*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 267-289.

DORIGO, M.; RIBEIRO, A. J. Significados de equação: um estudo realizado com alunos do Ensino Médio. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, São Paulo, v. 3, p. 154/5-182, 2010.

FIORENTINI, D. Pesquisando com professores: reflexões sobre o processo de produção e ressignificação dos saberes da profissão docente. In: MATOS, J. F.; FERNANDES, E. (Ed.). *Investigação em Educação Matemática* – perspectivas e problemas. Lisboa: APM, p.187-195, 2000.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista em Educação* – PUCC, Campinas n. 18, p. 107-115, 2005.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. O lugar das matemáticas na licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática:* período 2001-2012. Campinas: FE/UNICAMP, 2016.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações. In: PONTE, J.P. (Org.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, Lisboa: Universidade de Lisboa, p. 113-132, 2014.

GELLERT, U; HERNANZÉZ, R. B.; CHAPMAN, O. Research methods in mathematics teacher education. In: CLEMENTS, M. A. (Ken) et al. (Ed.). *Third international handbook of mathematics education.* New York: Springer, p. 327-360, 2013.

GRAEBER, A.; TIROSH, D. Pedagogical content knowledge: Useful concept or elusive notion? In: SULLIVAN, P. (Ed.). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. The international handbook of mathematics teacher education*, Rotterdam: Sense, 2008. v. 1, p. 117-132.

LI, X. *An investigation of secondary school Algebra teachers' mathematical knowledge for teaching algebraic equation solving.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) — The University of Texas at Austin, Austin, 2007. 318f.

OPFER, V. D.; PEDDER, D. Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research*, v. 81, n. 3, p. 376-407, 2011.

MATOS, A. S.; PONTE, J. P. Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, Itália, Supplemento n.2 al n. 19, 2009.

MATOS, J. F.; POWELL, A.; SZTAJN, P. Mathematics teachers' professional development: Processes of learning in and from practice. In: EVEN, R.; BALL, L. D. (Ed.). *The professional education and development of teachers of mathematics.* New York: Springer, 2009. p. 167-183.

McCRORY, R.; FLODEN, R.; FERRINI-MUNDY, J.; RECKASE, M. D.; SENK, S. L. Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, Boston, v. 43, n. 5, p. 584-615, 2012.

MOREIRA, P. C. 3+ 1 e suas (In) Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). *Bolema,* Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 2012.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 985-1005, 2013.

PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 465-496, 2017.

PONTE, J. P. Mathematics teachers' professional knowledge. In: PONTE, J. P.; MATOS, J. F. (Ed.). *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education***.** Lisboa, Portugal: PME, v. 1, p. 195-210, 1994.

PONTE, J. P. Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: TAVARES, J. et al. (Eds.). *Investigar e formar em educação:* Actas do IV congresso da SPCE. Porto: SPCE, p. 59-72, 1999.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: IE/UL, p. 343-358, 2014.

PONTE, J. P.; BRANCO, N. Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, Curitiba, n. 50, p. 135-155, 2013.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: ENGLISH, L. D. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education - Second Edition*. New York: Routledge, p. 225-263, 2008.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 59, p. 53-68, 2011.

POWELL, A. B., FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

RIBEIRO, A. J. Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*. Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 535-557, 2012.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. *Ciência e Educação*, Bauru, v. 19, n.1, p. 55-71, 2013.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. *Álgebra para a formação do professor:* explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RIBEIRO, A. J.; OLIVEIRA, F. A. P. V. S. Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. *Zetetiké*, Campinas, v. 23, n. 44, p. 311-327, 2015.

SANGATA, R.; GUARINO, J. Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM*, Springer, p. 133-145, 2011.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Washington, v.15, n. 2, p. 4-14, Feb. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, Cambridge, n. 57, p. 1-22, 1987.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E; HAREL, G. (Ed.) *The concept of function*: aspects of epistemology and Pedagogy. MAA Notes, 1992, p. 25-58.

SMITH, M. S. *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston: NCTM, 2001.

STAHNKE, R.; SCHUELER, S.; ROESK-WINTER, B. Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, Heidelberg, v. 48, n. 1, p. 1-27, 2016.

STEPHENS, M.; RIBEIRO, A. J. Working towards algebra: the importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana*, México, DF, v. 15, p. 307-401, 2012.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. *Mathematical knowledge in teaching*. Springer, Netherlands, p. 195-212, 2011.

TYLAN, R. D. Characterizing a highly accomplished teacher's noticing of third-grade students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Springer, Netherlands, p. 259-280, 2017.

WASSERMAN, N. H. Unpacking teachers' moves in the classroom: navigating micro-and macro-levels of mathematical complexity. *Educational Studies in Mathematics*, Rotterdam, n. 90, p. 75-93, 2015.

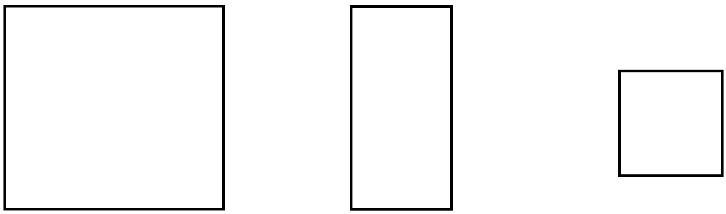
Apêndices

Apêndice 1: Tarefa sobre o Conceito de Equação

Tarefa para o 9º ano

Você e seus colegas de grupo estão recebendo o Kit de peças que será utilizado na atividade.

Tarefa 1 - Após as orientações iniciais do professor, conversem entre si e determinem a área de cada uma.



Tarefa 2 - Novamente conversem entre si para responder à pergunta: Como podemos representar, com essas peças, a expressão $x^2 + 2x + 1$? Após a conclusão, desenhe a resposta abaixo.

Tarefa 3 – Mantendo as peças da atividade anterior, responda:

a) É possível formar um quadrado com essas peças? Conversem entre si e, em caso afirmativo, desenhem a conclusão abaixo.

b) Caso tenham conseguido formar um quadrado com as peças, qual é a medida do lado desse quadrado? Registrem as conclusões abaixo.

Tarefa 4 – Após as orientações do professor, conversem entre si e respondam: Qual é o valor de x na equação $x^2 + 4x + 3 = 3$? Registrem suas conclusões abaixo.

Tarefa 5 – Vocês já conhecem as equações do 1º grau, como por exemplo, $2x + 1 = 0$ e $4x + 3 = 3$. Compare essas equações com as duas que resolvemos nessa aula e registrem diferenças e semelhanças entre elas.

Apêndice 2 – Tarefa sobre o Conceito de Função

Tarefa: Qual o melhor plano?

Pedro está analisando três planos diferentes de operadoras de telefonia celular para decidir qual o mais vantajoso para suas necessidades. Os planos são apresentados na tabela a seguir:

Operadora	Plano	Valores
A	Básico	Mensalidade R$ 45,81 + R$ 0,459/min
B	Fale +	Mensalidade R$ 39,78 + R$ 0,827/min
C	Total	Mensalidade R$ 43,63 + R$ 0,012/seg

Para realizar o que se pede em cada item, utilize o software *Geogebra*:

1) Crie um arquivo com o nome Atividade 1.
2) Transcreva as tabelas a seguir para a planilha do *Geogebra* (Exibir→Planilha).

Operadora A – Plano “Básico”

Duração (min)	Valor (R$)
5	
10	
15	
20	
25	

Operadora B – Plano “Fale+”

Duração (min)	Valor (R$)
5	
10	
15	
20	
25	

Operadora C – Plano “Total”

Duração (min)	Valor (R$)
5	
10	
15	
20	
25	

3) Complete cada tabela, inserindo uma expressão que permita determinar o valor a pagar para qualquer duração de chamadas.

4) Represente na janela de visualização do *Geogebra* os pontos referentes a cada um dos planos (Selecione os dados referentes a cada plano→clique com o botão direito do mouse→selecione a opção “Criar→Lista de pontos”)

5) Usando o comando <u>Regressão Linear</u> (Menu “Reta”), trace o gráfico que representa cada um dos planos. Registre algumas observações comparando as expressões algébricas e os gráficos construídos.

6) Registre as expressões algébricas das funções que representam cada um dos planos.

7) Analise cada um dos planos, apresentando uma justificativa e indicando qual (ou quais) das representações (tabela, expressão algébrica ou gráfico) recorreu para dar a resposta a cada um dos itens a seguir:

a) Considerando que Pedro fala cerca de 120 minutos por mês, qual dos planos deverá escolher de forma a pagar menos?

b) Se Pedro quiser gastar no máximo R$ 135,00 por mês, qual plano deverá escolher entre as operadoras B e C?

c) Há algum momento em que o plano da operadora B é mais vantajoso?

d) Se Pedro pagasse por chamada e tivesse que escolher um único plano, com qual deveria ficar, na sua opinião?

Apêndice 3 – Tarefa de Aprendizagem Profissional

Roteiro para a análise de episódios de aula

1) Você percebeu o conhecimento do conteúdo do professor no episódio assistido? Cite um "momento particular" da aula em que você identificou isso.
2) Você identificou erros conceituais no decorrer do episódio de ensino? Em caso afirmativo, cite-os.
3) O professor usou uma terminologia adequada e/ou linguagem acessível aos estudantes no episódio de ensino? Em que momentos você percebeu isso?
4) Você identificou uma relação de dependência dos procedimentos usados pelo professor no decorrer do episódio de aula?
5) O professor escolheu diferentes representações (tabular, gráfica, algébrica, língua natural) no decorrer do episódio de aula? Identifique-as, em caso afirmativo.
6) O professor escolheu exemplos para a abordagem do conteúdo matemático? Cite-os, em caso afirmativo.
7) Você percebeu conexões entre conceitos matemáticos no episódio de aula? Quais?
8) Destaque as interações ocorridas entre o professor e as ideias dos estudantes, se houveram.
9) O professor aproveitou as oportunidades oferecidas no desenvolvimento do planejamento em sala de aula para dialogar com os estudantes?
10) Houve desvio da agenda planejada? Se sim, identifique.
11) Quais foram os *insights* do professor, em relação ao conteúdo e/ou recursos didáticos que você viu no episódio de aula?